INSTITUCION EDUCATIVA DEPARTAMENTAL MONSEÑOR AGUSTIN GUTIERREZ
FÓMEQUE - CUNDINAMARCA
AREA DE MATEMATICAS
GRADO NOVENO
2023

<table>
<tr><td>ASIGNATURA</td><td>Matemáticas</td><td>GRADO</td><td>Noveno</td><td>GUIA</td><td>02</td></tr>
<tr><td>DOCENTE</td><td colspan="3">Carlos Fernando Martínez C.</td><td>PERIODO</td><td>Segundo</td></tr>
<tr><td>ESTUDIANTE</td><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td>CURSO</td><td></td><td colspan="2">CODIGO</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>TIEMPO</td><td>10 semanas</td><td>INICIO</td><td>17/Abril/2023</td><td>TERMINACIÓN</td><td>23/Junio/2023</td></tr>
<tr><td>UNIDAD TEMATICA</td><td colspan="5">CONJUNTO DE LOS NUMEROS REALES (R)</td></tr>
<tr><td>EJE TEMÁTICO</td><td colspan="5">POTENCIACIÓN Y RADICACIÓN EN NUMEROS REALES (R)</td></tr>
<tr><td>TEMAS CLAVES</td><td colspan="5">Radicación en R: Definición y propiedades. Radicales. Racionalización. Números Complejos: Relaciones, Propiedades y Operaciones.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">COMPETENCIA</td><td colspan="5">Competencia General: Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Competencia Específica:
• Reconoce y aplica las propiedades de la potenciación y radicación utilizándolas en la solución de diferentes situaciones de la vida diaria.
.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">DESEMPEÑOS</td><td>PARA APRENDER</td><td colspan="4">• Reconoce operaciones y propiedades (potenciación, radicación), en el conjunto de los números reales.
• Identifica estrategias para racionalizar expresiones radicales.
• Reconoce características específicas del conjunto de los números complejos</td></tr>
<tr><td>PARA HACER</td><td colspan="4">• Resuelve operaciones que contengan la potenciación y radicación en reales.
• Hace uso de las operaciones de potenciación y radicación en la resolución de problemas de la vida cotidiana.
• Hace operaciones básicas en el conjunto de los números complejos.</td></tr>
<tr><td>PARA SER</td><td colspan="4">Acepta y aplica las indicaciones dadas en el desarrollo de las temáticas</td></tr>
<tr><td>PARA CONVIVIR</td><td colspan="4">Actúa con disposición para realizar el trabajo propuesto dentro y fuera del aula.</td></tr>
</table>

1. FASE DE ENTRADA

Desarrollar las actividades propuestas en esta guía. Tener en cuenta colocar las fechas, los títulos de los temas y de las actividades de acuerdo al orden dado en la presente guía de trabajo. El texto escribirlo con esfero y los ejercicios realizarlos con lápiz por si se deben corregir. Realizar una buena distribución del espacio en las hojas de trabajo. Escribir con letra clara y legible. Las hojas deben estar numeradas.

INTENSIDAD HORARIA SEMANAL DE ACOMPAÑAMIENTO DEL DOCENTE: 4 HORAS DE 60 MINUTOS POR CURSO.

FECHA DE REALIZACIÓN Y ENTREGA: ACTIVIDADES SEMANALES DE ACUERDO AL HORARIO ESTABLECIDO POR EL DOCENTE Y LA INSTITUCIÓN.

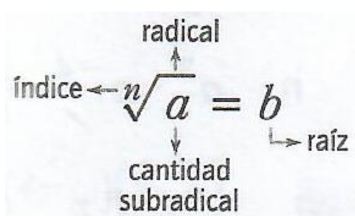
En la siguiente tabla se relacionan las actividades a desarrollar en la presente guía. Tener en cuenta los títulos de cada referente conceptual a trabajar semana a semana. Adicional a esto, como material de apoyo, se anexan al final de la guía los links de videos explicativos.

Temas	**REFERENTES CONCEPTUALES**	**ACTIVIDADES**	**PAGINA**
1	Radicación en R. Propiedades. Simplificación.	Actividad 1	5
		Actividad 2	10
2	Operaciones con radicales	Actividad 3	13
		Actividad 4	18
3 **4**	Racionalización Números Complejos	Actividad 5 Actividad 6	23 30
	Prueba Bimestral Actividades de Nivelación y Refuerzo	AUTOEVALUACION Y COEVALUACION.	33

1. FASE DE ELABORACIÓN

1.1 <u>RADICACIÓN EN R. PROPIEDADES.</u>

la radicación es una de las operaciones inversas de la potenciación, que nos permite conocer la base de la potencia cuando se conocen la potencia y el exponente. Los elementos o partes de la radicación son:



Simbólicamente se define la radicación como:

Si n es cualquier entero positivo mayor que 1, entonces la raíz n-ésima de a se define como $\sqrt[n]{a} = b$ si y solo si $a = b^n$.

Simbólicamente: $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow a = b^n$ Si n es par, se tiene que $a \geq 0$ y $b \geq 0$

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{27} = 3 \text{ Porque } 3^3 = 27$$

$$\sqrt[4]{81} = 3 \text{ Porque } 3^4 = 81$$

$$\sqrt{121} = 11 \text{ Porque } 11^2 = 121$$

Observemos que sucede en el caso de que el radicando sea un numero negativo:

$$a)\ \sqrt[3]{-8} = -2 \text{ ya que } (-2)^3 = -8$$

$$b)\ \sqrt[5]{-243} = -3 \text{ ya que } (-3)^5 = -243$$

$$c)\ \sqrt[4]{-81} = ?$$

En el último ejemplo se debería buscar un número elevado "a la cuatro" que de como resultado -81, ¿existirá algún número que cumpla esa condición?

Los ejemplos anteriores se pueden generalizar en el siguiente cuadro:

$\sqrt[n]{a}$	a positivo	a negativo
n par	Tiene dos soluciones en $\mathbb{R}$, una positiva y otra negativa.	No tiene soluciones en $\mathbb{R}$
n impar	Tiene una única solución en $\mathbb{R}$, que será del mismo signo que a.	

Para simplificar expresiones que contienen radicales se aplican las siguientes propiedades:

Raíz n-ésima de un número elevado a la n	Para todo $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}^+$, se cumple que: $\sqrt[n]{a^n} = a$ si n es impar; $\sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert$ si n es par
Raíz de un producto	Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}^+$, se cumple que $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$
Raíz de un cociente	Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}^+$, se cumple que $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
Raíz de una raíz	Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y $m, n \in \mathbb{Z}^+$, se cumple que $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$
Raíz de una potencia	Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y $m, n \in \mathbb{Z}^+$, se cumple que $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Ejemplo:

Para resolver $\sqrt[3]{512}$ se descompone 512 en sus factores primos:

512	2
256	2
128	2
64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

$$512 = 2^9 \Rightarrow \sqrt[3]{512} = \sqrt[3]{2^9} = 2^{\frac{9}{3}} = 2^3 = 8$$

Ejemplo:

- Cambia a la forma radical:

a. $-5y^{\frac{2}{5}} = -5\sqrt[5]{y^2}$

b. $\left(x^{\frac{1}{2}} + y^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{y^{\frac{1}{2}}}} = \sqrt[3]{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{y}}}$

- Cambia a la forma exponencial:

a. $\sqrt[3]{(a+b)^2} = (a+b)^{\frac{2}{3}}$

b. $\sqrt[9]{-2x^3y^7} = \left(-2x^3y^7\right)^{\frac{1}{9}} = -2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{7}{9}}$

- **Radicales con índice diferente y base igual**

Si $a \in \mathbb{R}$ y $m, n \in \mathbb{Z}^+$, entonces se cumple que:

$$\sqrt[n]{a}\,\sqrt[m]{a} = \sqrt[mn]{a^{m+n}} \quad \text{Producto de radicales}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a^{m-n}} \text{ con } m > n \quad \text{Cociente de radicales}$$

Ejemplo:

Escribe en la forma radical más simple:

a. $\sqrt[3]{36x^3y} \cdot \sqrt[5]{36x^3y} = \sqrt[(3)(5)]{\left(36x^3y\right)^{3+5}} = \sqrt[15]{\left(36x^3y\right)^8} = \sqrt[15]{36^8x^{24}y^8}$

b. $\sqrt[4]{32a^8} \cdot \sqrt[6]{32a^8} = \sqrt[(4)(6)]{\left(32a^8\right)^{4+6}} = \sqrt[24]{\left(32a^8\right)^{10}} = \sqrt[24]{32^{10}a^{80}}$

Ejemplo:

Resuelve usando propiedades:

a. $\dfrac{\sqrt[4]{8a^6b^5}}{\sqrt[5]{8a^6b^5}} = \sqrt[20]{(8a^6b^5)} = 8^{\frac{1}{20}}a^{\frac{6}{20}}b^{\frac{5}{20}} = 8^{\frac{1}{20}}b^{\frac{3}{10}}b^{\frac{1}{4}}$

b. $\dfrac{\sqrt{81a^4b^8}}{\sqrt[3]{81a^4b^8}} = \sqrt[6]{(81a^4b^8)} = 81^{\frac{1}{6}}a^{\frac{4}{6}}b^{\frac{8}{6}} = 3^{\frac{2}{3}}a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{3}}$

c. $\sqrt[5]{32a^5b^{10}} \cdot \sqrt[6]{32a^5b^{10}} = \sqrt[30]{(32a^5b^{10})^{11}}$

d. $\dfrac{\sqrt[4]{7a^6b^{12}}}{\sqrt[3]{7a^6b^{12}}} = \sqrt[12]{(7a^6b^{12})^{-1}}$

Ejemplo:

Resuelve $\left(\sqrt{3x^2y^3}\right)\left(\sqrt[3]{3x^2y^3}\right) \div \left(\sqrt[3]{3x^2y^3}\right)\left(\sqrt[4]{3x^2y^3}\right)$

$$\frac{\sqrt{3x^2y^3}\cdot\sqrt[3]{3x^2y^3}}{\sqrt[3]{3x^2y^3}\cdot\sqrt[4]{3x^2y^3}} = \frac{\sqrt{3x^2y^3}}{\sqrt[3]{3x^2y^3}}\cdot\frac{\sqrt[3]{3x^2y^3}}{\sqrt[4]{3x^2y^3}}$$

$$= \sqrt[6]{(3x^2y^3)^{3-2}} \cdot \sqrt[12]{(3x^2y^3)^{4-3}}$$

$$= \sqrt[6]{3x^2y^3} \cdot \sqrt[12]{3x^2y^3} = \sqrt[72]{(3x^2y^3)^{18}} = (3x^2y^3)^{\frac{1}{4}}$$

ACTIVIDAD 01

NOTA: TODAS LAS RESPUESTAS DE LOS EJERCICIOS DEBEN JUSTIFICARSE CON LAS RESPECTIVAS OPERACIONES, PROCEDIMIENTOS O PROCESOS.

1. Encuentra las raíces usando las propiedades y relaciona la respuesta:

a. $\sqrt{\dfrac{100}{16}}$	( ) $2\sqrt{5}$	g. $\sqrt[3]{432}$	( ) $\dfrac{1}{3}$
b. $\sqrt[3]{\dfrac{8}{27}}$	( ) $8\sqrt[3]{4}$	h. $\sqrt[3]{-\dfrac{125}{216}}$	( ) $6\sqrt[3]{2}$
c. $4\sqrt{54}$	( ) $-\dfrac{5}{6}$	i. $\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{256}$	( ) $\dfrac{2}{3}$
d. $\sqrt{1-\dfrac{8}{9}}$	( ) 6	j. $\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{864}$	( ) $\dfrac{4}{5}$
e. $\dfrac{\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{250}}$	( ) 2	k. $\dfrac{1}{4}\sqrt[3]{512}$	( ) $\dfrac{5}{2}$
f. $\sqrt[3]{24}\sqrt[3]{9}$	( ) $2\sqrt[3]{4}$	l. $\sqrt{20}$	( ) $12\sqrt{6}$

2. Escribe cada expresión con exponente fraccionario y simplifica si es posible:

a. $\sqrt{13}$

b. $\sqrt[4]{3m}$

c. $\sqrt[3]{a^7b^{12}}$

d. $\sqrt[4]{\frac{3}{5}m^8n^2}$

e. $\sqrt[5]{a^{10}b^{15}c^5}$

f. $\sqrt[3]{12xy}$

g. $3\sqrt[3]{w}$

h. $\sqrt[7]{\frac{1}{2}mn}$

i. $\sqrt{(x+y)}$

j. $\sqrt[3]{(a^2-b^2)^6}$

k. $2\sqrt[9]{x^3y}$

l. $\sqrt[3]{27x^{15}y^9}$

3. Escribe las siguientes expresiones en forma radical:

a. $4^{\frac{1}{3}}$

b. $(5x)^{\frac{1}{2}}$

c. $\left(\frac{3}{4}m^2n\right)^{\frac{1}{3}}$

d. $13^{\frac{1}{8}}$

e. $20^{\frac{2}{3}}$

f. $(5h^2k^3)^{\frac{1}{2}}$

g. $(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$

h. $(2x^3y^5)^{\frac{1}{3}}$

i. $(w+z)^{\frac{1}{5}}$

j. $\left(\frac{1}{2}a^5b^3c^2\right)^{\frac{1}{4}}$

k. $(x-y)^{\frac{2}{3}}$

l. $(3ab)^{\frac{1}{8}}$

m. $(abc^2d)^{\frac{1}{2}}$

n. $(5fg^2h^3)^{\frac{1}{6}}$

4. Aplica las propiedades de la radicación para simplificar las siguientes expresiones:

a. $\sqrt{121m^8}$

b. $\sqrt[3]{-27x^{12}y^{21}}$

c. $\sqrt{m^{13}}$

d. $\sqrt{6m}\cdot\sqrt{8m}$

e. $\sqrt{20}\cdot\sqrt{5}$

f. $\sqrt[3]{\frac{729}{r^6s^9}}$

g. $\sqrt{\sqrt[3]{x^6y^{12}}}$

h. $\sqrt{\sqrt{81n^{16}}}$

i. $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$

j. $\frac{52\sqrt{28}}{26\sqrt{4}}$

k. $\frac{18\sqrt{40}}{3\sqrt{10}}$

l. $\frac{2\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}}$

m. $\sqrt[3]{\frac{(-5)^3x^6y^9z^{18}}{(-2)^3w^9}}$

n. $\sqrt{\sqrt[5]{32m^{10}n^{15}}}$

o. $\sqrt[4]{16\cdot(x-2)^4}$

p. $\sqrt[7]{2.187x^{21}y^7}$

5. Resuelve los siguientes problemas:

a. El área de una habitación cuadrada es $144z^6y^2$ pulgadas cuadradas. ¿Cuáles son las dimensiones de la habitación?

b. El volumen de un cubo está dado por la expresión $512a^9b^6$. ¿Cuál es la longitud de su arista?

c. Los catetos de un triángulo rectángulo isósceles miden $\sqrt{8m^2x^2}$, ¿cuál es la longitud de la hipotenusa?

d. Johannes Kepler descubrió una relación entre el período (T), tiempo que tarda un planeta en dar una vuelta al Sol, y la distancia (d) de este planeta al astro. $T=\sqrt{d^3}$, T en años y d en unidades astronómicas, UA (UA = $1{,}5\times10^{14}$ km). Halla T para el planeta Júpiter si $d=5{,}2$.

1.2. SIMPLIFICACIÓN DE RADICALES.

Para simplificar radicales es preciso tener en cuenta que:

a. El radicando debe ser un producto. Por eso es necesario factorizarlo y descomponer las constantes o coeficientes numéricos en factores primos.
b. Si el exponente de algún factor es mayor que el índice del radical, este se descompone en dos factores, de tal manera que el exponente de uno de ellos sea divisible por el índice y el exponente del otro factor sea menor que el índice.
c. Aplicar las propiedades de los radicales para simplificar cada factor.

Un radical esta simplificado cuando:

a. El radicando no contiene factores de potencia mayor o igual al índice del radical.
b. La potencia del radicando y el índice radical no tienen factor común diferente que 1.
c. La expresión dada no debe contener radical en el denominador.
d. La expresión dada no debe contener factores dentro del radical.

Para introducir una cantidad bajo un signo radical se eleva dicha cantidad a la potencia que indique el índice del radical.

Ejemplo:

Introducir $3a^2$ en el radical $\sqrt[3]{a^2b}$

Solución:

$$3a^2\sqrt[3]{a^2b} = \sqrt[3]{(3a^2)^3a^2b}$$
$$= \sqrt[3]{27a^8b}$$

Ejemplo:

a. Simplifica $6\sqrt{50} = 6\sqrt{25\cdot 2} = 6\sqrt{25}\sqrt{2} = 6(5)\sqrt{2} = 30\sqrt{2}$

b. Simplifica $6\sqrt{50} - \frac{1}{2}\sqrt{8} = 6\sqrt{25\cdot 2} - \frac{1}{2}\sqrt{4\cdot 2} = 6(5)\sqrt{2} - \frac{1}{2}(2)\sqrt{2} = 30\sqrt{2} - \sqrt{2} = 29\sqrt{2}$

c. Simplifica $\sqrt[3]{108a^7b^6} = \sqrt[3]{3^3\cdot 2^2a^6a^1b^6} = (3^3\cdot 2^2a^6a^1b^6)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{3}{3}}\cdot 2^{\frac{2}{3}}a^{\frac{6}{3}}a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{6}{3}}$

$= 3a^2b^2\sqrt[3]{2^2a} = 3a^2b^2\ \sqrt[3]{4a}$

d. Escribe en la forma radical más simple.

$$\sqrt[4]{\frac{x^8y^4}{16m^{12}}} = \left(\frac{x^8y^4}{2^4m^{12}}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{x^{\frac{8}{4}}y^{\frac{4}{4}}}{2^{\frac{4}{4}}m^{\frac{12}{4}}} = \frac{x^2y}{2m^3}$$

Ejemplo:

a. Escribe en la forma exponencial simple:

$$\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^6 y}}} = \left\{\left[\left(x^6 y\right)^{\frac{1}{4}}\right]^{\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{\left[x^{\frac{6}{4}} y^{\frac{1}{4}}\right]^{\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{x^{\frac{6}{12}} y^{\frac{1}{12}}\right\}^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{6}{24}} y^{\frac{1}{24}} = x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{24}}$$

b. Simplifica la expresión $\sqrt{12a} + \sqrt{27a} - \sqrt{75a}$, $a \geq 0$

$$\sqrt{12a} = \sqrt{4 \cdot 3 \cdot a} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3a} = 2\sqrt{3a}$$

$$\sqrt{27a} = \sqrt{9 \cdot 3a} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{3a} = 3\sqrt{3a}$$

$$\sqrt{75a} = \sqrt{25 \cdot 3a} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3a} = 5\sqrt{3a}$$

Por tanto, $\sqrt{12a} + \sqrt{27a} - \sqrt{75a} = 2\sqrt{3a} + 3\sqrt{3a} - 5\sqrt{3a} = (2 + 3 - 5)\sqrt{3a} = 0\sqrt{3a} = 0$

Reducir a índice común dos o más radicales es encontrar radicales equivalentes a los dados que tengan el mismo índice. Un índice común es cualquier múltiplo del m.c.m. de los índices. El mínimo índice común es el m.c.m. de los índices, habitualmente se elige éste.

Ejemplo:

Reducir a índice común los siguientes radicales:

$$\sqrt{2} \qquad \sqrt[3]{2^2 \cdot 3^2} \qquad \sqrt[4]{2^2 \cdot 3^3}$$

Solución:

- En primer lugar, hallamos el m.c.m. de los índices: 2, 3 y 4

$$\text{mcm}(2, 3, 4) = 12$$

- Dividimos el común índice (12) por cada uno de los índices (2, 3 y 4) y cada resultado obtenido se multiplica por sus exponentes correspondientes.

$$\sqrt[12]{2^6}\sqrt[12]{(2^2)^4 \cdot (3^2)^4}\sqrt[12]{(2^2)^3 \cdot (3^3)^3}$$

- Operamos con las potencias

$$\sqrt[12]{2^6} \qquad \sqrt[12]{2^8 \cdot 3^8} \qquad \sqrt[12]{2^6 \cdot 3^9}$$

Ejemplo:

Reducir a índice común los siguientes radicales:

$$\sqrt{x^5} \ ; \ \sqrt[4]{y^3} \ ; \ \sqrt[6]{z^7}$$

Solución:

Hallamos el M.C.M. de los índices: 2; 4 y 6.

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ & 1 & 3 & 3 \\ & & 1 & \end{array} \qquad \textbf{M.C.M.}\ (2\ ;\ 4\ ;\ 6) = 2\times2\times3 = \boxed{12}$$

Luego, $\boxed{12}$ se divide por el índice propio de cada radical y el cociente se multiplica por el exponente del subradical, o sea:

$$\sqrt{x^5} = \sqrt[\boxed{12}]{(x^5)^6} = \sqrt[12]{x^{30}}$$

$$\sqrt[4]{y^3} = \sqrt[\boxed{12}]{(y^3)^3} = \sqrt[12]{y^9}$$

$$\sqrt[6]{z^7} = \sqrt[\boxed{12}]{(z^7)^2} = \sqrt[12]{z^{14}}$$

Luego: $\sqrt[12]{x^{30}}$; $\sqrt[12]{y^9}$; $\sqrt[12]{z^{14}}$ son respectivamente, equivalentes a: $\sqrt{x^5}$; $\sqrt[4]{y^3}$; $\sqrt[6]{z^7}$

Ejemplo:

Reducir a índice común:

$$\sqrt[4]{5x} \quad ; \quad \sqrt[5]{3y^3} \quad ; \quad \sqrt[10]{9az^2}$$

Solución:

Hallamos el M.C.M. de los índices: 4 ;5 y 10.

$$\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 10 & 2 \\ 2 & 5 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 5 & 5 \\ & 1 & 1 & \end{array} \qquad \textbf{M.C.M.}\ (4\ ;\ 5\ ;\ 10) = 2\times2\times5 = \boxed{20}$$

Luego, $\boxed{20}$ se divide por el índice propio de cada radical y el cociente se multiplica por el exponente del subradical, o sea:

$$\sqrt[4]{5x} = \sqrt[\boxed{20}]{(5x)^5} = \sqrt[20]{3125x^5}$$

$$\sqrt[5]{3y^3} = \sqrt[\boxed{20}]{(3y^3)^4} = \sqrt[20]{81y^{12}}$$

$$\sqrt[10]{9az^2} = \sqrt[\boxed{20}]{(9az^2)^2} = \sqrt[20]{81a^2z^4}$$

Luego: $\sqrt[20]{3125x^5}$; $\sqrt[20]{81y^{12}}$; $\sqrt[20]{81a^2z^4}$; son respectivamente, equivalentes a: $\sqrt[4]{5x}$; $\sqrt[5]{3y^3}$; $\sqrt[10]{9az^2}$

ACTIVIDAD 02

NOTA: TODAS LAS RESPUESTAS DE LOS EJERCICIOS DEBEN JUSTIFICARSE CON LAS RESPECTIVAS OPERACIONES, PROCEDIMIENTOS O PROCESOS.

1. Escribe bajo un solo radical cada expresión:

a. $\dfrac{\sqrt{x^2y^3}\sqrt{x^3}\sqrt{y^5}}{\sqrt{x^4}\sqrt{y^2}}$ f. $\sqrt[x]{\sqrt{a}}$ k. $\dfrac{\sqrt{3m^2}}{\sqrt{4n^3}}\dfrac{\sqrt{2n^6}}{\sqrt{9m^3}}$

b. $\sqrt[4]{\sqrt{8ab}}$ g. $\sqrt[x]{\sqrt[y]{6}}$ l. $\sqrt{5\sqrt{5}}$

c. $\sqrt[5]{\sqrt[6]{h^2k^3}}$ h. $\dfrac{\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{6}}$ m. $\sqrt[3]{(2+k)\sqrt{2+k}}$

d. $\sqrt{\sqrt{2a}}$ i. $\sqrt{2}\sqrt{a}\sqrt{b}$ n. $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$

e. $\sqrt{\dfrac{m}{n}\sqrt{\dfrac{n}{m}\sqrt[3]{\dfrac{n}{m}\sqrt[4]{\dfrac{n}{m}}}}}$ j. $\dfrac{\sqrt{2a^4}}{\sqrt{6a^3}}$ ñ. $\sqrt{\dfrac{1}{p}\sqrt{p\sqrt{p}}}$

2. Introduce todos los factores dentro del radical:

a. $\dfrac{4a^4c^8}{5b^5}\sqrt[3]{\dfrac{2a^2}{b}}$ f. $7y^5z^4\sqrt{2z}$ j. $-\dfrac{1}{3}r^4s^5\ \sqrt[3]{6rs^2}$

b. $2\sqrt{3a^2}$ g. $\dfrac{1}{4}\sqrt{2a}$ k. $4\sqrt{6}$

c. $3x\ \sqrt[3]{x^2}$ h. $k^{-5}m^6n^7\ \sqrt[4]{k^{-2}m^{-1}n^{-2}}$ l. $\dfrac{3}{4}x^2y^{-8}z^{-2}\ \sqrt[5]{5x^3y^{-4}}$

d. $2a^3b^2\ \sqrt[3]{a^2b}$ i. $\dfrac{3g^2}{2h^{12}}\sqrt{\dfrac{2g}{h}}$ m. $\dfrac{6a^3}{b^8}\sqrt{\dfrac{a}{3}}$

e. $2p^5q\ \sqrt[4]{3p^3q}$

3. Reduce a índice común los siguientes radicales:

1. $\sqrt{5},\ \sqrt[3]{2}$
2. $\sqrt{2},\ \sqrt[4]{3}$
3. $\sqrt{3},\ \sqrt[3]{4},\ \sqrt[4]{8}$
4. $\sqrt{2},\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt[4]{5},\ \sqrt[6]{7}$
5. $\sqrt{5x},\ \sqrt[3]{4x^2y},\ \sqrt[6]{7a^3b}$
6. $\sqrt[3]{2ab},\ \sqrt[5]{3a^2x},\ \sqrt[15]{5a^3x^2}$
7. $\sqrt[4]{8a^2x^3},\ \sqrt[6]{3a^5m^4}$
8. $\sqrt[3]{x^2},\ \sqrt[6]{2y^3},\ \sqrt[9]{5m^7}$
9. $\sqrt[4]{3a},\ \sqrt[5]{2b^2},\ \sqrt[10]{7x^3}$
10. $2\sqrt[3]{a},\ 3\sqrt{2b},\ 4\sqrt[4]{5x^2}$
11. $3\sqrt[3]{a^2},\ \dfrac{1}{2}\sqrt[6]{b^3},\ 4\sqrt[9]{x^5}$
12. $\sqrt{2m},\ 3\sqrt[5]{a^3x^4},\ 2\sqrt[10]{x^7y^2}$

4. Reducir:

1. $7\sqrt{2}-15\sqrt{2}$
2. $4\sqrt{3}-20\sqrt{3}+19\sqrt{3}$
3. $\sqrt{5}-22\sqrt{5}-8\sqrt{5}$
4. $\sqrt{2}-9\sqrt{2}+30\sqrt{2}-40\sqrt{2}$
5. $\frac{3}{4}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}$
6. $\frac{3}{5}\sqrt{3}-\sqrt{3}$
7. $2\sqrt{5}-\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{3}{4}\sqrt{5}$
8. $\frac{1}{4}\sqrt{3}+5\sqrt{3}-\frac{1}{8}\sqrt{3}$
9. $a\sqrt{b}-3a\sqrt{b}+7a\sqrt{b}$
10. $3x\sqrt{y}+(a-x)\sqrt{y}-2x\sqrt{y}$
11. $(x-1)\sqrt{3}+(x-3)\sqrt{3}+4\sqrt{3}$
12. $\frac{1}{3}\sqrt[3]{2}-\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{2}$
13. $\frac{3}{5}\sqrt[3]{2}-\frac{1}{4}\sqrt[3]{2}+\frac{1}{6}\sqrt[3]{2}$
14. $x\sqrt[3]{a^2}-(a-2x)\sqrt[3]{a^2}+(2a-3x)\sqrt[3]{a^2}$

2. OPERACIONES CON RADICALES

2.1. Adición y Sustracción

- **Radicales semejantes**

Radicales semejantes son aquellos que tienen el mismo índice y el mismo radicando. Pueden diferir únicamente en el coeficiente que los multiplica.

Para comprobar si dos radicales son semejantes o no, se simplifican si se puede y se extraen todos los factores que sea posible.

Ejemplo:

Comprobar si los radicales que aparecen en la imagen son semejantes:

$9\sqrt{512} \qquad 7\sqrt{2}$

$2\sqrt[18]{x^3} \qquad 9\sqrt[42]{x^7}$

Solución:

Se descomponen los radicandos en factores primos y se simplifican.

$9\sqrt{512} = 9\sqrt{2^9} = \boxed{144\sqrt{2}}$

$7\sqrt{2} = \boxed{7\sqrt{2}}$

$2\sqrt[18]{x^3} = \boxed{2\sqrt[6]{x}}$

$9\sqrt[42]{x^7} = \boxed{9\sqrt[6]{x}}$

Si son semejantes porque tiene el mismo índice y el mismo radicando.

- **Procedimiento para sumar o restar radicales**

Para sumar o restar radicales se necesita que sean semejantes (que tengan el mismo índice y el mismo radicando), cuando esto ocurre se suman o restan los coeficientes de fuera y se deja el mismo radical. Se escribe a continuación los no semejantes.

Ejemplo:

Resuelve $3\sqrt{45} - 4\sqrt{5} + 6\sqrt{20} - 3\sqrt{24}$

$= 3\sqrt{3^2 \cdot 5} - 4\sqrt{5} + 6\sqrt{2^2 \cdot 5} - 3\sqrt{2^2 \cdot 6}$ Se descomponen los radicandos

$= 3 \cdot 3\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 6 \cdot 2\sqrt{5} - 3 \cdot 2\sqrt{6}$ Se extraen las raíces donde sea posible y se resuelven los productos indicados.

$= 9\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 12\sqrt{5} - 6\sqrt{6}$

$= (9 - 4 + 12)\sqrt{5} - 6\sqrt{6}$

$= 17\sqrt{5} - 6\sqrt{6}$

Ejemplo:

Resuelve $5\sqrt{24x^2y} + 6\sqrt{54x^2y} - 3x\sqrt{6y}$

$$5\sqrt{24x^2y} = 5\sqrt{6 \cdot 4 \cdot x^2 \cdot y} = 5\sqrt{6}\sqrt{4}\sqrt{x^2}\sqrt{y} = (5)(2)(x)\sqrt{6 \cdot y} = 10x\sqrt{6y}$$

$$6\sqrt{54x^2y} = 6\sqrt{9 \cdot 6 \cdot x^2y} = 6\sqrt{9}\sqrt{6}\sqrt{x^2}\sqrt{y} = (6)(3)(x)\sqrt{6y} = 18x\sqrt{6y}$$

$$3x\sqrt{6y} = 3x\sqrt{6y}$$

Por tanto, $5\sqrt{24x^2y} + 6\sqrt{54x^2y} - 3x\sqrt{6y} = 10x\sqrt{6y} + 18x\sqrt{6y} - 3x\sqrt{6y}$

$= (10x + 18x - 3x)\sqrt{6y} = 25x\sqrt{6y}$

Ejemplo:

2. Si $a = 20\sqrt{12}$, $b = 5\sqrt{48}$, $c = -4\sqrt{75}$ y $h = b - c + a$, ¿cuál es el valor de h?

$h = b - c + a$

$= 5\sqrt{48} - (-4\sqrt{75}) + 20\sqrt{12}$ Se remplazan los valores de a, b y c.

$= 5\sqrt{2^4 \cdot 3} - (-4\sqrt{5^2 \cdot 3}) + 20\sqrt{2^2 \cdot 3}$ Se expresa como potencia cada cantidad subradical.

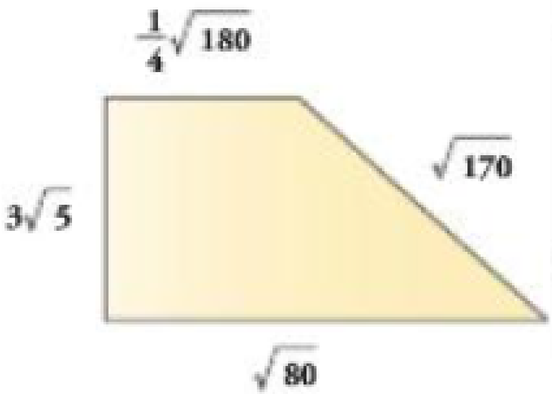
$= 20\sqrt{3} + 20\sqrt{3} + 40\sqrt{3}$ Se simplifica.

$= 80\sqrt{3}$ Se suman radicales semejantes.

Por tanto, el valor de h es $80\sqrt{3}$.

Ejemplo:

Hallar el perímetro del siguiente trapecio:



$\frac{1}{4}\sqrt{180} + 3\sqrt{5} + \sqrt{80} + \sqrt{170}$ Se plantea la suma de las medidas de los lados del trapecio

$= \frac{6}{4}\sqrt{5} + 3\sqrt{5} + 4\sqrt{5} + \sqrt{170}$ Se simplifican los radicales que es posible.

$= \frac{17}{2}\sqrt{5} + \sqrt{170}$ Se reducen radicales semejantes.

Por tanto, el perímetro P del trapecio es:

$$P = \frac{17}{2}\sqrt{5} + \sqrt{170}.$$

ACTIVIDAD 03

NOTA: TODAS LAS RESPUESTAS DE LOS EJERCICIOS DEBEN JUSTIFICARSE CON LAS RESPECTIVAS OPERACIONES, PROCEDIMIENTOS O PROCESOS.

1. Resuelve las operaciones y colorea la respuesta en la tabla para encontrar un dibujo oculto:

$-6\sqrt{3}$	$8\sqrt{5}-10\sqrt{2}$	$3\sqrt[4]{2}$	$6\sqrt{3}$	$25-\frac{3}{7}\sqrt{3}-\frac{7}{2}\sqrt{2}$	$8\sqrt{2}-49\sqrt{3}$	$9\sqrt{2}+10\sqrt{5}$	$4\sqrt{3}$
$6\sqrt[3]{2}+9\sqrt[3]{3}$	$8\sqrt[3]{2}-8\sqrt[3]{3}$	$\frac{13}{4}\sqrt{5}$	$10a\sqrt{a}$	$2\sqrt[3]{6}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{3}$	$\frac{47}{12}\sqrt{2}+\frac{13}{24}\sqrt{3}$	$9\sqrt[3]{2}-9\sqrt[3]{3}$	$25\sqrt{3}-7\sqrt{7}$
$\frac{8}{3}\sqrt{6}-6\sqrt{5}$	$4\sqrt[3]{6}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{3}$	$\sqrt[4]{2}$	$\frac{9}{2}\sqrt{5}$	$16\sqrt[3]{3}-\frac{1}{3}\sqrt[3]{2}+\frac{8}{5}\sqrt[3]{5}$	$\frac{23}{6}\sqrt[3]{4}+\frac{61}{12}\sqrt[3]{6}$	$\sqrt{5a}-\frac{38}{5}\sqrt{2a}$	$6\sqrt[3]{6}-\frac{2}{3}\sqrt[3]{3}$
$\frac{11}{4}\sqrt{5}$	$8\sqrt[3]{2}-11\sqrt[3]{4}$	$11\sqrt{2}+9\sqrt{5}$	$\frac{\sqrt{3}}{20}-\frac{5\sqrt{2}}{12}$	$a\sqrt{5a}-\frac{41a}{6}\sqrt{2a}$	$\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{7\sqrt{2}}{12}$	$25-\frac{19}{18}\sqrt{3}-\frac{9}{2}\sqrt{2}$	$2\sqrt{5}-3\sqrt{3}$
$23a$	$10\sqrt{a}$	$-\frac{19}{30}\sqrt[3]{6}$	$2\sqrt{5a^2}-2a\sqrt{3}$	$\frac{9}{4}\sqrt{6}-9\sqrt{5}$	$\frac{17}{30}\sqrt[3]{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{60}-\frac{7\sqrt{2}}{12}$	$\frac{7}{4}\sqrt{6}-7\sqrt{5}$
$\frac{4}{3}\sqrt{6}-\frac{1}{3}\sqrt{5}$	$-5\sqrt{3}$	$12\sqrt{2}-51\sqrt{3}$	$21\sqrt{3}-5\sqrt{7}$	$18\sqrt[3]{3}-\frac{4}{3}\sqrt[3]{2}+\frac{12}{5}\sqrt[3]{5}$	$3a\sqrt{5}-2a\sqrt{3}$	$\frac{25}{6}\sqrt[3]{4}+\frac{71}{12}\sqrt[3]{6}$	$9\sqrt[4]{2}$
$8a^2\sqrt{a}$	$26\sqrt{3}-6\sqrt{7}$	$3\sqrt{6}$	$18a$	$\frac{1}{3}\sqrt[3]{6}-\frac{2}{5}\sqrt[3]{3}$	$\frac{3}{20}\sqrt{3}-\frac{7}{12}\sqrt{2}$	$28\sqrt{5}$	$21\sqrt{a}$
$12\sqrt{5}$	$-\frac{16}{15}\sqrt[3]{6}$	$6\sqrt{5a}-2\sqrt{3a}$	$a\sqrt{5}-\frac{40a}{3}\sqrt{2}$	$6\sqrt[3]{2}-7\sqrt[3]{3}$	$4\sqrt{2}-54\sqrt{3}$	$\frac{27}{12}\sqrt{2}+\frac{15}{24}\sqrt{3}$	$9\sqrt{6}$

- $8\sqrt{5}-7\sqrt{5}-6\sqrt{5}+12\sqrt{5}+21\sqrt{5}$
- $\sqrt{36a^2}+\sqrt{64a^2}+\sqrt{81a^2}$
- $\frac{3}{4}\sqrt{5}+\frac{8}{4}\sqrt{5}-\frac{6}{4}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{3}{2}\sqrt{5}$
- $-14\sqrt{3}+\sqrt{2}-13\sqrt{3}+15\sqrt{2}-24\sqrt{3}-4\sqrt{2}$
- $\frac{2}{3}\sqrt{3}-\frac{1}{4}\sqrt{3}-\frac{2}{5}\sqrt{3}+\frac{1}{4}\sqrt{2}+\frac{2}{3}\sqrt{2}-\frac{3}{2}\sqrt{2}$
- $\sqrt{96}-\sqrt{54}+\sqrt{24}$
- $-\sqrt[3]{6}-6\sqrt[3]{6}+5\sqrt[3]{6}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{6}+\frac{2}{3}\sqrt[3]{6}+\frac{1}{5}\sqrt[3]{6}$
- $13-\frac{\sqrt{48}}{4}-\frac{3}{2}\sqrt{18}+12-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{12}}$
- $\sqrt{196a^3}+\sqrt{144a^3}-8\sqrt{4a^3}$
- $\frac{1}{2}\sqrt[3]{81}-\frac{3}{4}\sqrt[3]{192}+\frac{2}{3}\sqrt[3]{384}-\frac{1}{3}\sqrt[3]{48}$

k. $\frac{2}{3}\sqrt{486}-\frac{3}{8}\sqrt{600}-\sqrt{320}-\frac{1}{6}\sqrt{180}$

l. $a\sqrt{27}-\sqrt{45a^2}+a\sqrt{80}+\sqrt{20a^2}-a\sqrt{75}$

m. $4\sqrt{3}-5\sqrt{12}+\sqrt{27}+\sqrt{75}-\sqrt{147}$

o. $4\sqrt{\frac{1}{12}}+\frac{2}{3}\sqrt{72}-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{48}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{18}}$

p. $\sqrt[4]{32}+\sqrt[4]{162}-\sqrt[4]{512}$

q. $-\frac{5}{6a^5}\sqrt{200a^{13}}+\frac{3a}{4}\sqrt{320a}+\frac{3}{8}\sqrt{32a^3}-\frac{1}{5a^6}\sqrt{3\,125a^1}$

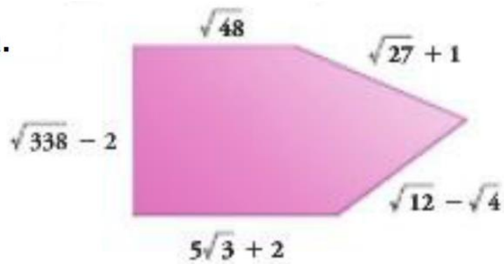
r. $2\sqrt{18}+3\sqrt{20}+\sqrt{45}+\sqrt{50}$

s. $\frac{1}{2}\sqrt[3]{648}+\frac{3}{5}\sqrt[3]{320}+3\sqrt[3]{375}-\frac{1}{6}\sqrt[3]{1\,024}$

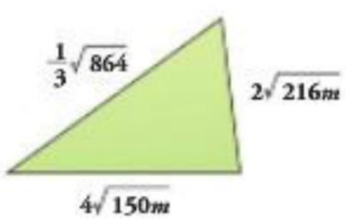
t. $4\sqrt[3]{4}+6\sqrt[3]{6}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}+\frac{1}{4}\sqrt[3]{6}-\frac{1}{3}\sqrt[3]{6}+\frac{2}{3}\sqrt[3]{4}$

2. Halla el perímetro de las siguientes figuras:

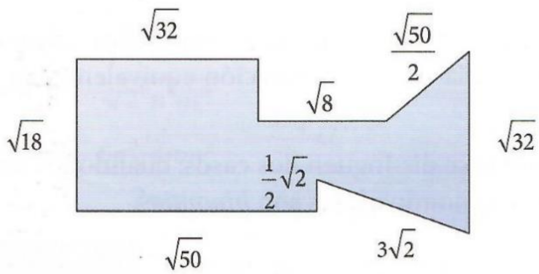
a.



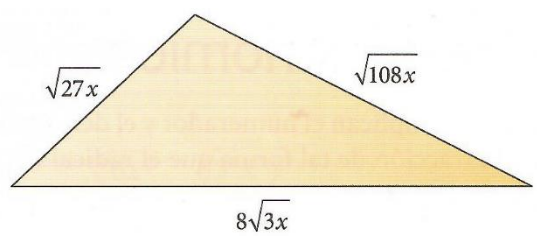
b.



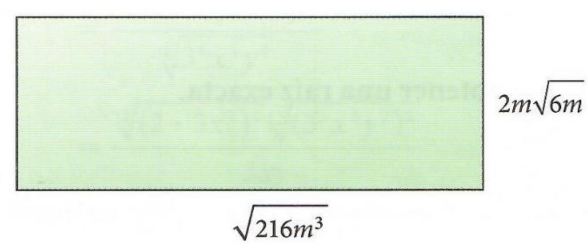
c.



d.



e.



3. Resuelve el siguiente cuadrado mágico, en el cual la suma de las filas, las columnas y las diagonales es igual a $9(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

	$\sqrt{2}-2\sqrt{12}$	
	$3\sqrt{3}+\sqrt{18}$	
$\sqrt{8}-\sqrt{27}$		$\sqrt{12}+\sqrt{8}$

2.2. *Multiplicación y División*

Para multiplicar radicales es necesario distinguir dos casos:

- **Cuando los radicales tienen el mismo índice, se multiplican los radicandos y se deja el mismo índice.**

$$\sqrt[n]{a}\cdot \sqrt[n]{b}= \sqrt[n]{a\cdot b}$$

Ejemplo:

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}=\sqrt{12}=\sqrt{2^2\cdot 3}=2\sqrt{3}$$

- **Cuando los radicales tienen distinto índice, primero se reducen a común índice y luego se multiplican.**

Ejemplo:

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[4]{27}=$$

Descomponemos en factores los radicandos

$$=\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3^2}\cdot\sqrt[4]{3^3}$$

Reducimos a común índice por lo que tenemos que calcular el mínimo común múltiplo de los índices, que será el común índice.

$$\text{m.c.m.}(2,3,4)=12$$

Dividimos el común índice (12) por cada uno de los índices $(2,3,4)$ y cada resultado obtenido se multiplica por sus exponentes correspondientes $(1,2,3)$. Realizamos el producto de potencias con la misma base en el radicando y extraemos factores del radicando

$$=\sqrt[12]{3^6}\cdot\sqrt[12]{\left(3^2\right)^4}\cdot\sqrt[12]{\left(3^3\right)^3}=\sqrt[12]{3^6\cdot 3^8\cdot 3^9}=\sqrt[12]{3^{23}}=3\sqrt[12]{3^{11}}$$

Ejemplo:

Efectúa los siguientes productos:

a. $(\sqrt{2}-3)(\sqrt{2}+5)=(\sqrt{2})(\sqrt{2})+(\sqrt{2})(5)-(3)(\sqrt{2})-(3)(5)$
$=\sqrt{4}+5\sqrt{2}-3\sqrt{2}-15$
$=2+5\sqrt{2}-3\sqrt{2}-15=-13+2\sqrt{2}$

b. $(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+5) = (\sqrt{x})(\sqrt{x}) + (\sqrt{x})(5) - (3)\sqrt{x} - (3)(5)$

$$= \sqrt{x^2} + 5\sqrt{x} - 3\sqrt{x} - 15 = x + 2\sqrt{x} - 15$$

c. $(\sqrt[5]{u^2} - \sqrt[5]{v^3})(\sqrt[5]{u^3} + \sqrt[5]{v^2}) = \sqrt[5]{u^5} + \sqrt[5]{u^2v^2} - \sqrt[5]{v^3u^3} - \sqrt[5]{v^5}$

$$= u + \sqrt[5]{u^2v^2} - \sqrt[5]{u^3v^3} - v$$

d. $(\sqrt{2a})(\sqrt[3]{3a^2b})(\sqrt[6]{15a^3x^2})$

Para resolver este producto, se reduce a un índice común calculando el m.c.m. entre 2, 3 y 6 entonces 6 es el índice común y se divide entre cada índice:

$$(\sqrt{2a})(\sqrt[3]{3a^2b})(\sqrt[6]{15a^3x^2}) = (\sqrt[6]{(2a)^3})(\sqrt[6]{(3a^2b)^2})(\sqrt[6]{15a^3x^2})$$
$$= (\sqrt[6]{8a^3})(\sqrt[6]{9a^4b^2})(\sqrt[6]{15a^3x^2})$$
$$= \sqrt[6]{1080a^{10}b^2x^2}$$

Para dividir radicales es necesario distinguir dos casos:

- **Cuando los radicales tienen el mismo índice, se dividen los radicandos y se deja el mismo índice.**

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Ejemplo:

$$\frac{\sqrt[6]{128}}{\sqrt[6]{16}} = \sqrt[6]{\frac{128}{16}} = \sqrt[6]{\frac{2^7}{2^4}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$$

Como los dos radicales tienen el mismo índice lo ponemos todo en un radical con el mismo índice

Descomponemos en factores, hacemos la división de potencias con la misma base

Simplificamos el radical dividiendo el índice y el exponente del radicando por 3

- **Cuando los radicales tienen distinto índice, primero se reducen a común índice y luego se dividen.**

Ejemplo:

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} =$$

En primer reducimos a común índice por lo que tenemos que calcular el mínimo común múltiplo de los índices, que será el común índice. $\text{m.c.m.}(3,2)=6$.

Dividimos el común índice (6) por cada uno de los índices (3 y 2) y cada resultado obtenido se multiplica por sus exponentes correspondientes (1 y 1)

Descomponemos el 4 en factores para poder hacer la división de potencias con la misma base y dividimos

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}}=\sqrt[6]{\frac{4^2}{2^3}}=\sqrt[6]{\frac{\left(2^2\right)^2}{2^3}}=\sqrt[6]{\frac{2^4}{2^3}}=\sqrt[6]{2}$$

Ejemplo:

Efectua el siguiente cociente:

$$\sqrt[3]{27x^3y^6}\div\sqrt[3]{64x^6y^9}=\frac{\sqrt[3]{27x^3y^6}}{\sqrt[3]{64x^6y^9}}=\sqrt[3]{\frac{27x^3y^6}{64x^6y^9}}=\frac{3xy^2}{4x^2y^3}=\frac{3}{4xy}$$

Ejemplo:

Efectúa:

a. $$\left(\frac{2}{3}\sqrt[3]{125x^6y^{18}}\right)\div\left(\frac{4}{5}\sqrt[3]{216x^9y^{12}}\right)=\frac{\frac{2}{3}(125)^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{6}{3}}\right)\left(y^{\frac{18}{3}}\right)}{\frac{4}{5}(216)^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{9}{3}}\right)\left(y^{\frac{12}{3}}\right)}$$

$$=\frac{\frac{2}{3}(5)(x^2)(y^6)}{\frac{4}{5}(6)(x^3)(y^4)}=\frac{\frac{10}{3}x^2y^6}{\frac{24}{5}x^3y^4}=\frac{\frac{10}{3}y^2}{\frac{24}{5}x}=\frac{50y^2}{72x}=\frac{25y^2}{36x}$$

b. $$\frac{\sqrt[4]{16x^8y^{12}}}{\sqrt[5]{243x^{10}y^{15}}}=\sqrt[20]{\frac{\left(16x^8y^{12}\right)^5}{\left(243x^{10}y^{15}\right)^4}}=\frac{\left(16x^8y^{12}\right)^{\frac{5}{20}}}{\left(243x^{10}y^{15}\right)^{\frac{4}{20}}}$$

$$=\frac{\left(16x^8y^{12}\right)^{\frac{1}{4}}}{\left(243x^{10}y^{15}\right)^{\frac{1}{5}}}=\frac{16^{\frac{1}{4}}x^{\frac{8}{4}}y^{\frac{12}{4}}}{243^{\frac{1}{5}}x^{\frac{10}{5}}y^{\frac{15}{5}}}=\frac{2x^2y^3}{3x^2y^3}=\frac{2}{3}$$

Ejemplo:

Efectúa el cociente:

$$\frac{\sqrt{256}}{\sqrt[3]{16}}=$$

Realizamos los mismos pasos del ejemplo anterior:

$$\frac{\sqrt{256}}{\sqrt[3]{16}} = \sqrt[6]{\frac{256^3}{16^2}} = \sqrt[6]{\frac{(2^8)^3}{(2^4)^2}} = \sqrt[6]{\frac{2^{24}}{2^8}}$$

Simplificamos el radical dividiendo por 2 el índice y el exponente del radicando, y por último <u>extraemos factores</u>

$$= \sqrt[6]{2^{16}} = \sqrt[3]{2^8} = 2^2\sqrt[3]{2^2} = 4\sqrt[3]{4}$$

ACTIVIDAD 04

<u>NOTA: TODAS LAS RESPUESTAS DE LOS EJERCICIOS DEBEN JUSTIFICARSE CON LAS RESPECTIVAS OPERACIONES, PROCEDIMIENTOS O PROCESOS.</u>

1. Resuelve las siguientes multiplicaciones:

a. $\frac{2}{7}\sqrt{24} \times \frac{2}{3}\sqrt{45} \times \frac{1}{4}\sqrt{18}$

b. $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{1}$

c. $3\sqrt[4]{12} \times 5\sqrt[4]{8}$

d. $\sqrt{\frac{3}{2}} \times \sqrt{\frac{8}{9}} \times \sqrt{\frac{6}{4}}$

e. $\frac{4}{3}\sqrt{2} \times 6\sqrt{5} \times \frac{1}{3}\sqrt{4}$

f. $\sqrt[3]{15} \times 2\sqrt[3]{9} \times \frac{1}{4}\sqrt[3]{45}$

g. $\sqrt{2ab} \times \sqrt{4a} \times \sqrt{6b} \times \sqrt{5}$

h. $3\sqrt{ab} \times b\sqrt{16a} \times a\sqrt{20b} \times b\sqrt{5a^2}$

i. $\sqrt[4]{a^3b^3} \times \sqrt[4]{a^5b^2} \times \sqrt[4]{a^7}$

j. $\sqrt{3} \times \sqrt{5}$

k. $\frac{2}{5}\sqrt{\frac{8a^4}{25}} \times \sqrt{\frac{b^6}{2}} \times \sqrt{\frac{5}{12}}$

l. $2\sqrt{3a} \times 5\sqrt{6b} \times \frac{2}{3}\sqrt{2a} \times \frac{2}{20}\sqrt{10b}$

m. $\frac{3}{5}\sqrt[4]{32a^6} \times \frac{3a^3}{2}\sqrt[4]{81} \times 4\sqrt[4]{625a^8}$

n. $\frac{a^3b^2}{4}\sqrt[3]{9a^7b^4} \times 6a^4\sqrt[3]{81b^6} \times ab^2\sqrt[3]{a^3b^4}$

ñ. $\sqrt{3} \times \sqrt[3]{2}$

o. $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[4]{3} \times \sqrt{5}$

p. $\sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[4]{b^3} \times \sqrt{2a}$

q. $a^3\sqrt[5]{2a^4} \times a\sqrt{3a}$

r. $\sqrt[6]{2a^5b^4} \times \sqrt[4]{3b^2} \times \sqrt[8]{ab^6}$

s. $\sqrt[6]{\frac{2}{3}a^{-5}} \times \sqrt[8]{3b^6} \times \sqrt[4]{2ab^3} \times \sqrt{\frac{1}{2}b^{-1}}$

t. $\sqrt[6]{\frac{25}{a^5b^3}} \times \sqrt[4]{\frac{12}{a^3b^2}}$

u. $3a\sqrt[3]{\frac{3}{2}a^2b} \times 2b\sqrt{\frac{1}{2}b} \times \sqrt[6]{6a^5b^4}$

2. Simplifica las siguientes expresiones:

a. $\sqrt{2}\left(\sqrt{4}+\sqrt{5}\right)$

b. $\sqrt{3x}\left(\sqrt{2x}-\sqrt{6x}\right)$

c. $2\sqrt{2}\left(-4\sqrt{6}+\sqrt{3}-7\sqrt{7}\right)$

d. $\left(3\sqrt{7}-3\sqrt{5}\right)\left(5\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)$

e. $3\sqrt{2m}\left(2\sqrt{5m^3}-5\sqrt{6m^5}\right)$

f. $-\sqrt{x^3y^2z}\left(\sqrt{xy^2z^3}-\sqrt{x^2z}\right)$

g. $\left(3+\sqrt{5}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)$

h. $\left(3\sqrt{2a}-\sqrt{5b}\right)\left(\sqrt{2a}+2\sqrt{5b}\right)$

i. $\left(-3\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}\right)\left(2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)$

j. $\left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}n}-3\sqrt{n}\right)\left(9\sqrt{\frac{2}{3}n}+6\right)$

k. $\left(\sqrt{81a^4}-a^2\sqrt{36}\right)\left(\sqrt{2a^2}+a\sqrt{4}\right)$

l. $\left(2\sqrt{2q^3}+\sqrt{3p^4}\right)^2$

3. Realiza las divisiones y relaciónalas con su respuesta:

a. $8\sqrt{18}\div 12\sqrt{9}$ ( ) $\sqrt[6]{x^5}$

b. $\sqrt{56x^{11}}\div\sqrt{77x^5}$ ( ) $\frac{8}{3}\sqrt[4]{\frac{x}{5y}}$

c. $\sqrt{\frac{12x^4y^9}{4y^7}}$ ( ) $x^2y\sqrt{3}$

d. $\frac{-25\sqrt[3]{54}}{30\sqrt[3]{72}}$ ( ) $\frac{2}{9}\sqrt[8]{\frac{25}{x^3y^2}}$

e. $\sqrt[3]{45x^3y^{11}}\div\sqrt[3]{63y^2}$ ( ) $6\sqrt[6]{3x^2y^2}$

f. $\frac{24\sqrt{50x^4}}{27\sqrt{24x^2}}$ ( ) $x^3\sqrt{\frac{8}{11}}$

g. $\frac{4\sqrt[8]{75x^2y^3}}{18\sqrt[8]{3x^5y^5}}$ ( ) $\frac{1}{2x^5}\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$

h. $\frac{\frac{3}{2}\sqrt[6]{18x^4y^5}}{\frac{1}{4}\sqrt[6]{6x^2y^3}}$ ( ) $-\frac{5}{6}\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$

i. $\frac{\frac{x^5}{4}\sqrt[3]{64x^{-3}}}{\frac{2x^4}{3}\sqrt[3]{81x^{15}}}$ ( ) $2x-2x^2\sqrt{2}$

j. $\sqrt[3]{8x^4}\div\sqrt{4x}$ ( ) $\frac{x^2y^4}{10}\sqrt[10]{288x^6}$

k. $\frac{\sqrt{24x^5}-\sqrt{48x^7}}{\sqrt{6x^3}}$ ( ) $\frac{3}{y}\sqrt[6]{\frac{3}{2y}}$

l. $\frac{\frac{2}{7}\sqrt[10]{81x^8y^9}}{14\sqrt[10]{21x^{-6}y^7}}$ ( ) $xy^3\sqrt[3]{\frac{5}{7}}$

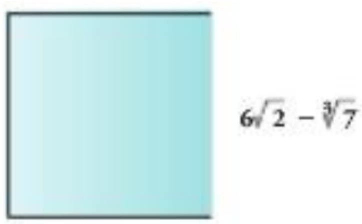
m. $\frac{32\sqrt[4]{5x^3y^3}}{6\sqrt{20xy^2}}$ ( ) $\frac{2}{3}\sqrt{2}$

n. $\frac{6x\sqrt[3]{18x^{12}y^4}}{2x^2\sqrt{6x^6y^5}}$ ( ) $\frac{20x}{9}\sqrt{\frac{1}{3}}$

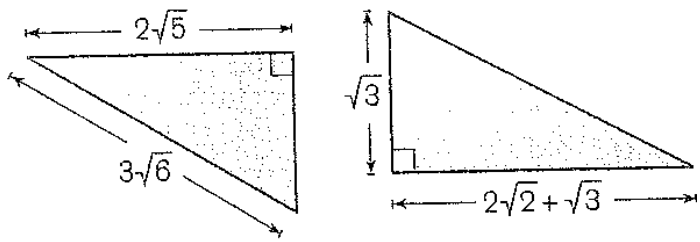
ñ. $\frac{\frac{y^3}{5}\sqrt{2x^4y^2}}{\frac{2}{x}\sqrt[5]{\frac{x^2}{3}}}$ ( ) $\frac{x}{49}\sqrt[10]{\frac{27x^4y^2}{7}}$

4. Resuelve las siguientes situaciones:

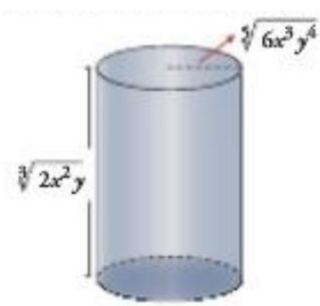
a. Encuentra una expresión algebraica para expresar el área del cuadrado:



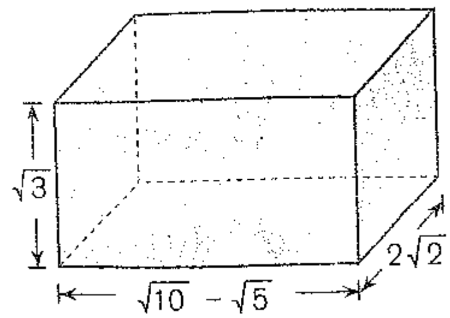
b- Calcula el área de los triángulos:

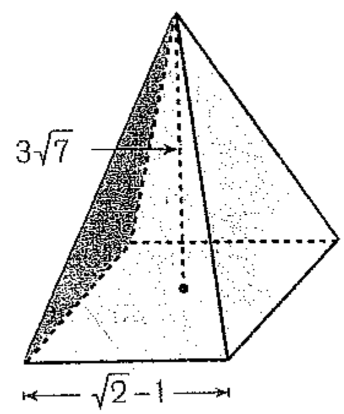


b. Determina el volumen del cilindro:

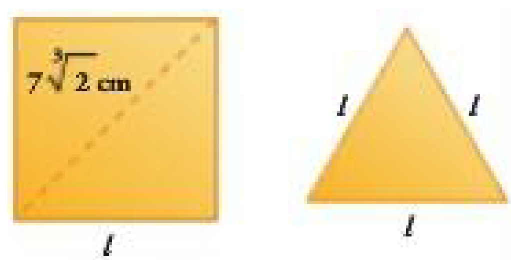


d. Determina el volumen del prisma y de la pirámide:





e. Encuentra el área de un triángulo equilátero cuyo lado tiene la misma medida que el lado de un cuadrado, como se muestra en la figura:



3. RACIONALIZACIÓN

La racionalización de radicales consiste en quitar los radicales del denominador, lo que permite facilitar el cálculo de operaciones como la suma de fracciones.

Podemos distinguir tres casos:

Caso 1: Racionalización del tipo $\dfrac{a}{b\sqrt{c}}$

Se multiplica el numerador y el denominador por $\sqrt{c}$

$$\frac{a}{b\sqrt{c}} = \frac{a \cdot \sqrt{c}}{b\sqrt{c} \cdot \sqrt{c}} = \frac{a \cdot \sqrt{c}}{b\left(\sqrt{c}\right)^2} = \frac{a \cdot \sqrt{c}}{b \cdot c}$$

Ejemplo:

$$\frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3 \cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Caso 2: Racionalización del tipo $\dfrac{a}{b\sqrt[n]{c^m}}$

Se multiplica numerador y denominador por $\sqrt[n]{c^{n-m}}$

$$\frac{a}{b\sqrt[n]{c^m}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\sqrt[n]{c^m} \cdot \sqrt[n]{c^{n-m}}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\sqrt[n]{c^m \cdot c^{n-m}}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{c^{n-m}}}{b \cdot c}$$

Ejemplo:

$$\frac{2}{3\sqrt[5]{4}} = \frac{2}{3\sqrt[5]{2^2}} = \frac{2 \cdot \sqrt[5]{2^3}}{3\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt[5]{2^3}} = \frac{2 \cdot \sqrt[5]{2^3}}{3\sqrt[5]{2^2 \cdot 2^3}} = \frac{2 \cdot \sqrt[5]{2^3}}{3 \cdot 2} = \frac{\sqrt[5]{8}}{3}$$

El radicando 4 lo ponemos en forma de potencia: 2^2

Tenemos que multiplicar en el numerador y denominador por la raíz quinta de $2^{5-2} = 2^3$

Multiplicamos los radicales del denominador, extraemos factores del radical y simplificamos la fracción

Ejemplo:

$$\frac{1}{\sqrt[5]{8a^4}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2^3a^4}} = \frac{1\left(\sqrt[5]{2^{5-3}a^{5-4}}\right)}{\left(\sqrt[5]{2^3a^4}\right)\left(\sqrt[5]{2^{5-3}a^{5-4}}\right)} = \frac{1\left(\sqrt[5]{2^2a}\right)}{\left(\sqrt[5]{2^3a^4}\right)\left(\sqrt[5]{2^2a}\right)} = \frac{\sqrt[5]{4a}}{\sqrt[5]{2^5a^5}} = \frac{\sqrt[5]{4a}}{2a}$$

Caso 3: Racionalización del tipo $\dfrac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$

Y en general cuando el denominador sea un **binomio con al menos un radical.**

Se multiplica el numerador y denominador por el conjugado del denominador.

El conjugado de un binomio es igual al binomio con el signo central cambiado:

$$a+b \longrightarrow a-b$$

$$-a+b \longrightarrow -a-b$$

$$a-b \longrightarrow a+b$$

$$-a-b \longrightarrow -a+b$$

También tenemos que tener en cuenta que: "**suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados**".

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$$

Ejemplo:

$$\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$$

Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador, quitamos paréntesis en el numerador y efectuamos la suma por diferencia en el denominador, por lo que obtenemos una diferencia de cuadrados

$$\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})}=\frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}=-2(\sqrt{2}+\sqrt{3})$$

Ejemplo:

$$\frac{2\sqrt{2}}{5-2\sqrt{6}}$$

Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador, quitamos paréntesis en el numerador y efectuamos la suma por diferencia en el denominador, por lo que obtenemos una diferencia de cuadrados

$$\frac{2\sqrt{2}}{5-2\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{2}(5+2\sqrt{6})}{(5-2\sqrt{6})(5+2\sqrt{6})}=\frac{2\sqrt{2}(5+2\sqrt{6})}{5^2-(2\sqrt{6})^2}=\frac{10\sqrt{2}+4\sqrt{12}}{25-4\cdot 6}=$$
$$10\sqrt{2}+8\sqrt{3}$$

Ejemplo:

$$\frac{y}{\sqrt{3}+\sqrt{y}}=\frac{y\left(\sqrt{3}-\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{y}\right)}$$
$$=\frac{y\left(\sqrt{3}-\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{y}\right)^2}=\frac{y\left(\sqrt{3}-\sqrt{y}\right)}{3-y}$$

ACTIVIDAD 05

NOTA: TODAS LAS RESPUESTAS DE LOS EJERCICIOS DEBEN JUSTIFICARSE CON LAS RESPECTIVAS OPERACIONES, PROCEDIMIENTOS O PROCESOS.

1. Racionaliza el denominador de las siguientes expresiones:

a. $\dfrac{3m}{2\sqrt{m}}$

b. $\dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$

c. $\sqrt{\dfrac{8}{3x^2}}$

d. $\dfrac{1}{\sqrt{18}}$

e. $\dfrac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

f. $\dfrac{a-b}{2\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

g. $\dfrac{a-3}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

h. $\dfrac{2a+b}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

i. $\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}$

j. $\dfrac{2m}{\sqrt[3]{3m}}$

k. $\dfrac{4}{\sqrt[5]{4x^2}}$

l. $\dfrac{-2}{\sqrt[6]{m^3}}$

m. $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

n. $\dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

o. $\dfrac{2\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-3}$

p. $\dfrac{2\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2\sqrt{6}}$

q. $\dfrac{3}{\sqrt[3]{9m^4}}$

r. $\dfrac{2x+2}{\sqrt[4]{(x+1)}}$

s. $\dfrac{-1}{\sqrt[7]{4}}$

t. $\dfrac{3x}{\sqrt[5]{2x^3}}$

u. $\dfrac{8u^3v^5}{\sqrt[3]{4u^2y^2}}$

v. $6c\sqrt[3]{\dfrac{2ab}{9c^2}}$

w. $\dfrac{x-y}{\sqrt[3]{x-y}}$

x. $\sqrt{\dfrac{3m}{2n}}$

y. $\dfrac{m}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}$

z. $\dfrac{x}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

aa. $\dfrac{1}{3+\sqrt{2}}$

ab. $\dfrac{-5}{2-\sqrt{3}}$

ac. $\sqrt[4]{\dfrac{3y^3}{4x}}$

ad. $\sqrt{\dfrac{9m^5}{2n}}$

ae. $\dfrac{3}{5+\sqrt{3}}$

af. $\dfrac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

ag. $\dfrac{a}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

ah. $\dfrac{-2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

2. Responde y justifica la respuesta:

a. ¿Quién es mayor ?

$$\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} \quad \text{ó} \quad \frac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{3}$$

b. ¿Cuál expresión es mayor?

$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3} \quad \text{ó} \quad \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}$$

c. El conjugado de $1-\sqrt{x}$ es $-1+\sqrt{x}$ ¿Verdadero o falso?

d. Para racionalizar el denominador de una expresión se debe multiplicar el numerador y el denominador de la fracción por un radical de forma que el radicando del numerador sea una raíz exacta ¿Verdadero o falso?

e. $5\sqrt{x}-\sqrt{y}$ es el conjugado de $5\sqrt{x}+\sqrt{y}$ ¿Verdadero o falso?

3. Resuelve los siguientes problemas:

a. El lado de un cuadrado mide $\frac{3}{4}\sqrt[3]{2x^2y}$ cm. Calcula:

- Su perímetro.
- La medida de su diagonal.
- El valor del área.

b. En el movimiento pendular, el periodo T esta determinado por la expresión:
donde l es la longitud y g la gravedad.

- Racionaliza la expresión asociada al periodo de un péndulo.
- Halla el periodo si $l = \frac{2}{\sqrt[3]{4}}$.

c. La temperatura Celsius de un recipiente de vidrio, a cierta temperatura, después de t minutos es:

$$T_c = 15 + \frac{740}{\sqrt[5]{e^t}}$$

- Racionaliza la expresión asociada a la temperatura.
- Después de 5 minutos, ¿Qué temperatura tendrá el recipiente?

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

d. En ciencias de la Tierra, $\frac{v_1}{v_2}$ es la relación entre la velocidad de ondas de compresión y la velocidad de ondas de corte:

$$v_1 = \sqrt{\frac{(1+2m)}{p}} \qquad v_2 = \sqrt{\frac{m}{p}}$$

¿Cuál es la expresión racionalizada y reducida de $\frac{v_1}{v_2}$?

4. CONJUNTO DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS $\mathbb{C}$

Algunas ecuaciones cuadráticas no tienen solución en los números reales. Por ejemplo, por más que lo intentes, nunca encontrarás un número real que sea solución de la ecuación: $x^2 = -1$. Esto se debe a que es imposible elevar un número real al cuadrado y ¡obtener un número negativo!

Sin embargo, sí existe una solución de la ecuación $x^2 = -1$ en un nuevo sistema de números, que se llama el sistema de números complejos.

La unidad imaginaria:

La columna vertebral de este nuevo sistema de números es la unidad imaginaria, o sea el número i:

$$i = \sqrt{-1} \qquad i^2 = -1$$

Números imaginarios puros:

Al utilizar múltiplos de esta unidad imaginaria, se pueden crear una infinidad de números imaginarios puros.

Ejemplo:

A saber, $3i$, $i\sqrt{5}$, y $-12i$, son ejemplos de números imaginarios puros; o sea, números de la forma bi, donde b es un número real diferente de cero.

Potencias del numero i

Sabemos que $i = \sqrt{-1}$ y que $i^2 = -1$.

Pero que pasa con i^3, i^4 y otras potencias enteras del numero imaginario. Aplicando propiedades de las potencias podemos evaluar el valor de las mismas:

$$i^3 = i^2 \cdot i \qquad = (-1) \cdot i \qquad = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 \qquad = (-1) \cdot (-1) \qquad = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i \quad \text{Propiedades de los exponentes} \qquad = 1 \cdot i \quad \text{Ya que } i^4 = 1 \qquad = i$$

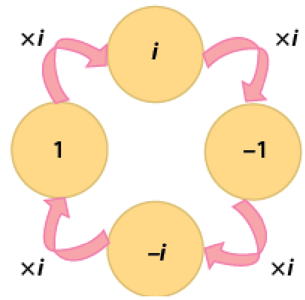
$$i^6 = i^4 \cdot i^2 \quad \text{Propiedades de los exponentes} \qquad = 1 \cdot (-1) \quad \text{Ya que } i^4 = 1 \text{ e } i^2 = -1 \qquad = -1$$

$$i^7 = i^4 \cdot i^3 \quad \text{Propiedades de los exponentes} \qquad = 1 \cdot (-i) \quad \text{Ya que } i^4 = 1 \text{ e } i^3 = -i \qquad = -i$$

$$i^8 = i^4 \cdot i^4 \quad \text{Propiedades de los exponentes} \qquad = 1 \cdot 1 \quad \text{Ya que } i^4 = 1 \qquad = 1$$

La siguiente tabla y la imagen muestran un resumen de las potencias calculadas anteriormente:

i^1	i^2	i^3	i^4	i^5	i^6	i^7	i^8
i	-1	$-i$	1	i	-1	$-i$	1



A partir de estos resultados, se puede concluir que se presenta un patrón para potencias del número imaginario que se repite cada exponente múltiplo de 4.

Para calcular potencias con exponentes enteros mas grandes se puede aplicar la siguiente regla: Dividir el exponente entre 4 y luego con el cociente y el residuo se hace la aplicación de las propiedades de las potencias para reemplazar los valores obtenidos en la tabla:

Ejemplo:

Calcular i^{138}

Solución:

Dividimos 138 entre 4:

$$\begin{array}{r|l} 138 & 4 \\ \cline{2-2} & 34 \\ 18 & \\ 2 & \end{array}$$

Usando el 34 y 2 y aplicando propiedades de las potencias, expresamos la potencia de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} i^{138} &= i^{136} \cdot i^{2} && \text{Propiedades de los exponentes} \\ &= (i^{4 \cdot 34}) \cdot i^{2} && 136 = 4 \cdot 34 \\ &= (i^{4})^{34} \cdot i^{2} && \text{Propiedades de los exponentes} \\ &= (1)^{34} \cdot i^{2} && i^{4} = 1 \\ &= 1 \cdot -1 && i^{2} = -1 \\ &= -1 \end{aligned}$$

Definición de numero complejo

Un número complejo es cualquier número que puede escribirse como $a + bi$, donde i es la unidad imaginaria y a y b son números reales.

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Parte} \\ \text{real}}}{a} \quad + \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Parte} \\ \text{imaginaria}}}{bi}$$

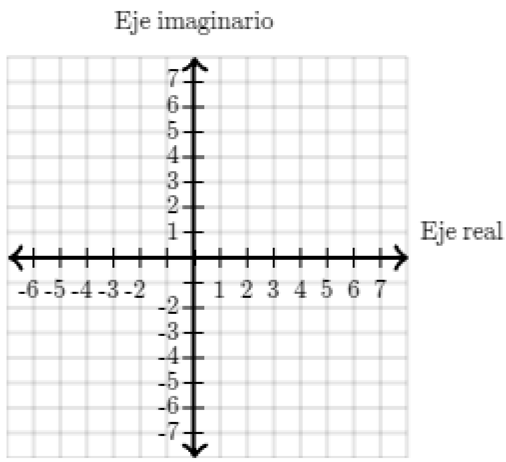
Ejemplo:

Número complejo	Forma estándar $a + bi$	Descripción de las partes
$7i - 2$	$-2 + 7i$	La parte real es -2 y la imaginaria es 7.
$4 - 3i$	$4 + (-3)i$	La parte real es 4 y la imaginaria es -3
$9i$	$0 + 9i$	La parte real es 0 y la imaginaria es 9
-2	$-2 + 0i$	La parte real es -2 y la imaginaria es 0

Al número $z = a + bi$ se le llama **número complejo en forma binómica** o binomial. En general, cualquier número complejo se denota por la letra z.

Plano Complejo

Tal como utilizamos la recta numérica para visualizar el conjunto de números reales, podemos utilizar el plano complejo para visualizar el conjunto de números complejos.



El plano complejo consiste de dos líneas rectas numéricas que se intersecan en un ángulo recto en el punto (0,0).

La recta numérica horizontal (que conocemos como el eje x en el plano Cartesiano) es el eje real.

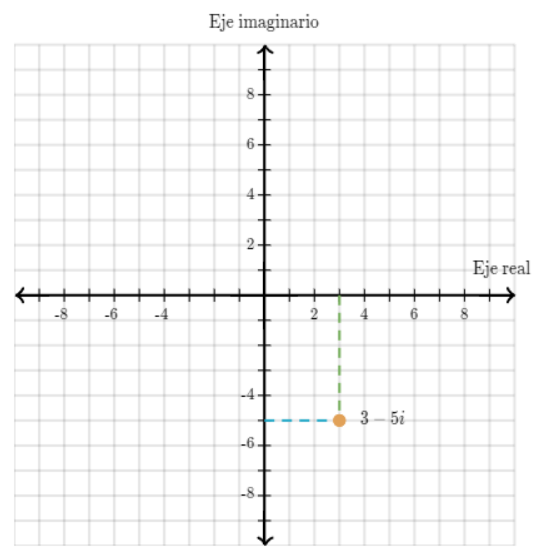
La línea recta numérica vertical (el eje y en el plano Cartesiano) es el eje imaginario.

Cada número complejo puede representarse como un punto en el plano complejo.

Ejemplo: Representar en el plano complejo el numero

$$3 - 5i$$

La ubicación de este número en el plano complejo es el punto que corresponde a3, en el eje real y -5 en el eje imaginario.

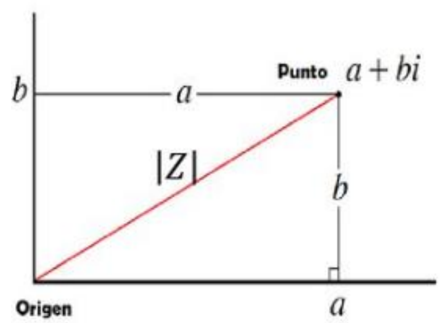


Norma, Opuesto y Conjugado de un numero complejo

a. **La norma o módulo de un numero complejo** $Z = a + bi$ corresponde a la distancia que existe entre el origen del plano complejo y la pareja ordenada (a, b). Se representa como $|Z|$ y se calcula de la siguiente forma:

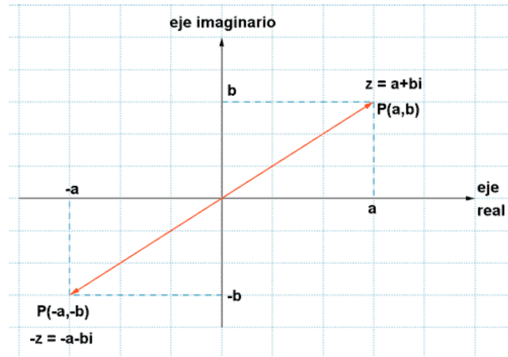
$$|Z|^2 = a^2 + b^2$$

$$|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

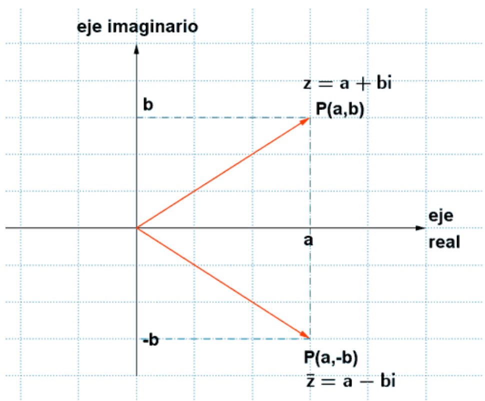


b. El opuesto de un numero complejo corresponde a los opuestos (signos contrarios) de la parte real y la parte imaginaria del numero. Se representa como $-Z$.

$$z = a + bi \text{ su opuesto es } -z = -a - bi$$



c. El conjugado de un numero complejo corresponde a otro numero complejo con igual parte real y el opuesto de la parte imaginaria. Se representa como $\bar{Z}$.



$$z = a + bi \text{ su conjugado es } \bar{z} = a - bi$$

Ejemplo: Determinar la norma o modulo, el opuesto y conjugado de los siguientes números complejos: $z = -3 + 2i$; $z = 1 - 2i$; $z = -3i$.

Solución:

$z = -3 + 2i$

El conjugado es: $\bar{z} = -3 - 2i$

El opuesto es: $-z = 3 - 2i$

El módulo es: $|z| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

$z = 1 - 2i$

El conjugado es: $\bar{z} = 1 + 2i$

El opuesto es: $-z = -1 + 2i$

El módulo es: $|z| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

$z = -3i$

El conjugado es: $\bar{z} = 3i$

El opuesto es: $-z = 3i$

El módulo es: $|z| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = 3$

Operaciones con Números Complejos

a. Adición: Para sumar dos o más números complejos, se suman respectivamente las partes reales y las partes imaginarias.

$$\text{SI } Z, W \in \mathbb{C} \; con \; Z = a + bi \quad y \quad W = c + di, entonces$$

$$Z + W = (a + c) + (b + d)i$$

Ejemplo: Sumar $z = 3 - 2i$ y $w = 5 + 6i$

Solución:

$$(3 - 2i) + (5 + 6i) = (3 + 5) + (-2i + 6i)$$

$$(3 - 2i) + (5 + 6i) = (3 + 5) + (-2i + 6i) = 8 + 4i$$

b. *Sustracción:* Para restar dos o más números complejos, se restan respectivamente las partes reales y las partes imaginarias.

$$\text{SI } Z, W \in \mathbb{C} \; con \; Z = a + bi \quad y \quad W = c + di, entonces$$

$$Z - W = (a + c) - (b + d)i = (a - c) + (b - d)i$$

Ejemplo: Efectuar $(4 - 7i) - (6 - 5i)$

Solución:

$$(4 - 7i) - (6 - 5i) = (4 - 6) + (-7i - (-5)i)$$

$$(4 - 7i) - (6 - 5i) = (4 - 6) + (-7i - (-5)i) = -2 + 2i$$

c. *Producto:* Para multiplicar dos números complejos, primero, se aplica la propiedad distributiva, luego se desarrollan las potencias de i y finalmente se reducen los términos semejantes.

Ejemplo: Efectuar $(3 + 4i)(2 - 5i)$

Solución:

$$\begin{aligned}(3 + 4i)(2 - 5i) &= 3 \cdot 2 + 3 \cdot (-5i) + 4i \cdot 2 + 4i \cdot (-5i) = \\ &6 - 15i + 8i - 20i^2 = \\ &6 - 15i + 8i - 20.(-1) = \\ &6 - 15i + 8i + 20 = \\ &(6 + 20) + (-15i + 8i) = 26 - 7i\end{aligned}$$

Ejemplo: Efectuar $(3+4i)(5-2i)$

Solución:

$$\begin{aligned}(3+4i)(5-2i) &= 3*(5-2i)+4i*(5-2i)\\ &= 15-6i+20i-8(-1)\\ &= 23+14i\end{aligned}$$

d. Cociente: Para dividir dos números complejos se multiplican tanto dividendo como divisor por el conjugado del divisor y se resuelven las multiplicaciones.

Ejemplo: Efectuar $\frac{-5+3i}{2-3i}$

Solución:

$$\frac{-5+3i}{2-3i}=\frac{-5+3i}{2-3i}\cdot\frac{2+3i}{2+3i}=\frac{-10-5i+6i+3i^2}{2^2-6i+6i-3i^2}=\frac{-13+i}{13}$$

Ejemplo: Efectuar $(5-i)\div(-4+5i)$

Solución:

$$\begin{aligned}(5-i)\div(-4+5i) &= \frac{5-i}{-4+5i}*\frac{-4-5i}{-4-5i}\\ &= \frac{-20-25i+4i+5(-1)}{16-25(-1)}\\ &= \frac{-25-21i}{41}\end{aligned}$$

ACTIVIDAD 06

NOTA: TODAS LAS RESPUESTAS DE LOS EJERCICIOS DEBEN JUSTIFICARSE CON LAS RESPECTIVAS OPERACIONES, PROCEDIMIENTOS O PROCESOS.

1. Clasifica los números como reales, imaginarios o complejos:

a. $5i$
b. $1+4i$
c. $(3+4)i$
d. $\sqrt{8}$
e. $-6i$
f. $\sqrt{-100}$
g. $\sqrt[3]{-27}$
h. i^2
i. $\sqrt[4]{-16}$
j. $\frac{\sqrt{-1}}{9}$
k. $\sqrt[3]{-512}$
l. $\sqrt[5]{-32}$
m. $\sqrt{-121}$
n. $\frac{2}{3}-\frac{i}{4}$

2. Relaciona las raíces con un numero imaginario equivalente:

a. $\sqrt{-16}$	( ) $2\sqrt{10}i$
b. $\sqrt{-144}$	( ) $-8\sqrt{6}i$
c. $\sqrt{-12}$	( ) $5\sqrt{30}i$
d. $-\sqrt{-96}$	( ) $5\sqrt{2}i$
e. $\sqrt{-40}$	( ) $12i$
f. $\frac{1}{2}\sqrt{-2\,000}$	( ) $3\sqrt{39}i$

g. $\sqrt{-250}$ ( ) $4i$

h. $\sqrt{-128}$ ( ) $-4\sqrt{6}i$

i. $3\sqrt{-28}$ ( ) $8\sqrt{2}i$

j. $-4\sqrt{-24}$ ( ) $10\sqrt{5}i$

k. $\sqrt{-750}$ ( ) $2\sqrt{3}i$

l. $\frac{2}{3}\sqrt{-351}$ ( ) $5\sqrt{10}i$

3. Halla las siguientes potencias de i:

a. i^{32}
b. i^{-4}
c. i^{47}
d. i^{349}
e. i^{-75}
f. i^{2012}
g. i^{-7}
h. i^{-32}
i. i^{5738}
j. i^{20000}

4. Para cada número complejo determinar

- Norma o modulo, Opuesto y Conjugado.
- Representación en el plano complejo del número, su opuesto y conjugado.

a. $z_1 = 4 - 7i$
b. $z_2 = -5 + 8i$
c. $z_3 = 2 + i$
d. $z_4 = 6 - 6i$
e. $z_5 = -5 - 2i$
f. $z_6 = -\frac{1}{2} - \frac{2}{3}i$
g. $z_7 = \sqrt{3} + \sqrt{5}i$
h. $z_9 = -1 + \sqrt{3}i$
i. $z_8 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}i$

5. Realiza las operaciones y ayuda a la vaca a encontrar su corral. Colorea el camino que debe seguir.

a. $(3 + 6i) + (3 - 6i)$

b. $(2 + 4i) + (2 + 3i)$

c. $(1 - 2i) + (4 + i)$

d. $(5 + i) + (-3i)$

e. $(3 - 4i) + (-3i)$

f. $(2 + 3i) + (4 - i)$

g. $(12 - 2i) + (8 + 3i)$

h. $(3 + 2i) + (1 + 2i) + (4 - 3i)$

i. $(3 + 4i) - (5 + 4i)$

j. $(5 - 3i) - (5 - 7i)$

k. $(3 - 3i) - (6 + 2i)$

l. $(2 - i) - (5 + 3i)$

m. $(3 - 4i) - (1 + 2i)$

n. $(-10 + 6i) - (-6 + 2i)$

ñ. $(12 + 3i) - 8i$

o. $[(3 + 5i) - (9 + 2i)] - [(7 + 3i) - (1 - 4i)]$

p. $\left(\frac{1}{2} - i\right) + \left(\frac{4}{3} - 7i\right)$

$6 + 2i$	$2 + 6i$	$8 + 2i$	$3 + 5i$	$-4 + 4i$
$20 + i$	$4 + 5i$	$12 - 6i$	$-4 + 6i$	$12 - 5i$
$3 - 7i$	$-4 + 6i$	$2i$	6	$-12 - 4i$
-2	$\frac{11}{6} - 8i$	$5 - 2i$	$4i$	$\frac{7}{6} - 4i$
$16 + i$	$8 - 3i$	$12 - 3i$	$5 - 2i$	8
$2 + 4i$	$4 + 7i$	$-4 + 5i$	$-3 - 5i$	$6 - 2i$
$2 + i$	$2 - 6i$	$-3 - 4i$	$5 - i$	2

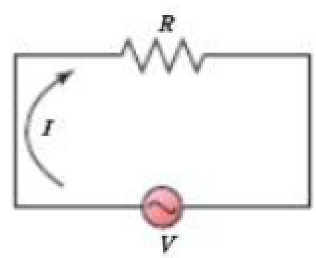
6. Completa la siguiente tabla y saca una conclusión de las operaciones realizadas por cada fila:

z	$\overline{z}$	$z+\overline{z}$	$z-\overline{z}$	$z \times \overline{z}$	$z \div \overline{z}$
$2+2i$					
$5-i$					
	$4-2i$				
	$-2+4i$				
$2-\frac{1}{3}i$					
	$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}i$				

7. Resuelve las siguientes situaciones:

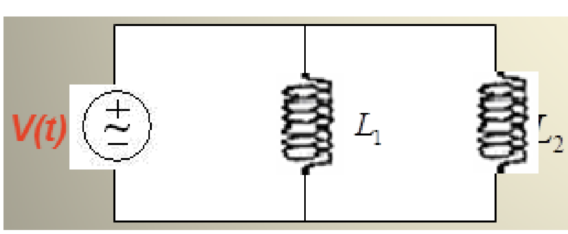
a. La impedancia es un fenómeno físico que se describe por medio de oscilaciones y es de gran importancia cuando se trabajo con corriente alterna. La impedancia afecta la corriente en un circuito y se calcula mediante la formula: $Z = \frac{V}{I}$, donde Z corresponde a la impedancia, V al voltaje e I la corriente. Calcula la impedancia para los siguientes valores de voltaje y corriente:

- $V = 1{,}5 - 0{,}3i$ e $I = -0{,}3i$
- $V = \frac{3}{2} - \frac{3}{10}i$ e $I = \frac{2}{10}i$
- Calcula el valor de la corriente I si se sabe que $Z = \frac{3}{2} + 8i$ y $V = \frac{8}{5} - \frac{2}{10}i$.



b. En un circuito, si las inductancias se encuentran en paralelo, la impedancia total está dada por la siguiente formula:

$$Z_T = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$



- Encuentra Z_T, si $Z_1 = 4 + i$; $Z_2 = -6 + 2i$
- Halla Z_1, si $Z_T = -\frac{3}{2} + \frac{i}{4}$ y $Z_2 = \frac{5}{3} - 9i$

3.1. HETEROEVALUACIÓN: *La valoración del trabajo desarrollado en la presente guía se realizará de la siguiente forma:*

- *Saber Hacer (65%):* *a. Elaboración y entrega de las actividades propuestas.*
  b. Ejercicios de Prueba.
- *Saber (15%):* *a. Prueba Bimestral*
- *Ser – Convivir (20%):* *a. Normas de Convivencia.*
  b. Responsabilidad y Cumplimiento en la entrega de trabajos.
  c. Seguimiento a las instrucciones dadas por el docente.
  d. Autoevaluación y Coevaluación.

3.2 EVALUACIÓN BIMESTRAL: Novena y Décima Semana del periodo.

3.3 AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACION: Novena y Décima Semana del Periodo

Transcribir en el cuaderno la estructura de la siguiente tabla (Solo escribir el número del criterio), marcar con una X en la casilla de la valoración correspondiente y luego totalizar cada columna. Se debe realizar con la máxima sinceridad:

1. **Nunca (1.0)** 2. **Casi Nunca (2.0)** 3. **A veces (3.0)** 4. **Casi Siempre (4.0)** 5. **Siempre (5.0)**

AUTOEVALUACION COMPONENTE HACER Y SER - CONVIVIR
(La realiza el estudiante)

CRITERIO	1	2	3	4	5
1. Dedico el tiempo suficiente para la realización de actividades y preparación de evaluaciones.					
2. Contribuyo con mi buen comportamiento y disposición al desarrollo de las clases.					
3. Asumo con responsabilidad el desarrollo de las actividades de casa (tareas) propuestas. Soy puntual en la entrega de estas actividades de acuerdo con las fechas establecidas.					
4. Llevo mis apuntes, actividades y trabajos de forma clara y ordenada. Escribo fechas, títulos, párrafos, gráficos teniendo en cuenta buena letra y ortografía, uso de colores adecuados.					
5. Asisto a clases justificando adecuadamente las fallas. Evito evadir o llegar tarde a clase.					
6. Me esfuerzo por seguir adecuadamente las indicaciones dadas por el docente para el buen desarrollo de las clases. Evito los llamados de atención.					
7. Me preocupo por estar atento y realizar las actividades de clase en forma diligente, haciendo uso eficiente del tiempo asignado para las mismas.					
8. Cuento con los materiales necesarios para el desarrollo de las actividades. Mantengo aseada el aula de clase. Hago uso adecuado del celular y otros dispositivos electrónicos.					

9. Demuestro interés y disposición por aprender matemáticas dando aportes que faciliten el aprendizaje personal y del grupo.					
10. Hago todo lo posible por superar mis dificultades académicas y aprender los contenidos que me parecen difíciles.					
TOTALES					
Firma Estudiante					

3.4. TALLER DE NIVELACION Y REFUERZO: Se aplicará durante el periodo de acuerdo a las actividades asignadas por el docente.

4. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bibliografía	***Páginas Web***
• Ortiz Wilches, L. y otros (2013). *Los Caminos del Saber. Matemáticas 9.* Bogotá, Colombia. Editorial Santillana. • Oicatá Ojeda, A. y otros (2012). *Zoom a las Matemáticas 9.* Bogotá, Colombia. Editorial Libros y Libros S.A. • Alfonso, L. y otros (2017). *Vamos a aprender Matemáticas 9.* Bogotá, Colombia. Ediciones SM**.** • Martínez Velandia, F.; Useche Barón, N (2009). *Misión Matemática 9***.** Bogotá, Colombia. Educar Editores S.A.	• https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/aritmetica/reales/potencias-4.html • https://laescuelaencasa.com/matematicas-2/polinomios/clase-10-razones-algebraicas/ • https://www.montereyinstitute.org/courses/DevelopmentalMath/TEXTGROUP-9-14_RESOURCE/U11_L1_T4_text_final_es.html • https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/aritmetica/reales/suma-de-radicales.html#tema_potencias-y-radicales • http://contenidosdigitales.ulp.edu.ar/exe/matematica1/propiedades_de_la_radicacin.html • http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/4esomatematicasB/radicales/quincena2_contenidos_4b.htm • https://matematicasn.blogspot.com/2015/12/reduccion-de-radicales-al-comun-indice.html • https://es.khanacademy.org/math/algebra2/x2ec2f6f830c9fb89:complex • https://slideplayer.es/slide/18099845/ • https://es.slideshare.net/jcremiro/numeros-complejos-85846424 • https://www.slideshare.net/SabrinaDechima/operaciones-bsicas-con-nmeros-complejos/9

Videos de Apoyo	
1.1	https://www.youtube.com/watch?v=KzvO6Fj_vuM&ab_channel=MallerliLoaiza
1.2	https://www.youtube.com/watch?v=2HachLBuoZo&ab_channel=Matem%C3%A1ticasprofeAlex https://www.youtube.com/watch?v=qSRMjsanmuU&ab_channel=Matem%C3%A1ticasprofeAlex https://matematicasn.blogspot.com/2015/12/reduccion-de-radicales-al-comun-indice.html
2.1	https://www.youtube.com/watch?v=KIrNlZrpzIo&ab_channel=Matem%C3%A1ticasconRobert https://www.youtube.com/watch?v=TP0gHe3vLo8&ab_channel=AcademiaVasquez https://www.youtube.com/watch?v=W900YdqFYk&ab_channel=AcademiaVasquez
2.2	https://www.youtube.com/watch?v=U8y1L0xrkc&ab_channel=AcademiaVasquez https://www.youtube.com/watch?v=sbKSgh1na0A&ab_channel=AcademiaVasquez https://www.youtube.com/watch?v=awfaWBAAq8s&ab_channel=Matem%C3%A1ticasprofeAlex https://www.youtube.com/watch?v=desONj_65CY&ab_channel=Matem%C3%A1ticasprofeAlex
3	https://www.youtube.com/watch?v=_QniIvCRHF4&ab_channel=ColombiaAprende
4	https://youtu.be/1yZQYg_na9U https://youtu.be/jmxXEFSX_qE

	https://youtu.be/QJpmqa_LqP8 https://youtu.be/_WpNpHPXxgY https://youtu.be/gJYmnHUIrxE https://www.youtube.com/watch?v=51Mw1QZVhME