INSTITUCIÓN EDUCATIVA DEPARTAMENTAL MONSEÑOR AGUSTÍN GUTIÉRREZ

GUÍA DE TRABAJO

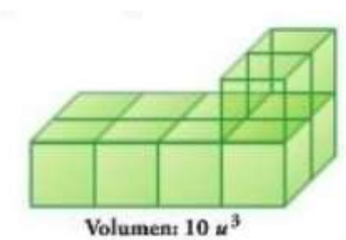
ASIGNATURA	Matemáticas	**CURSO**	Undécimo
DOCENTE	Diego Felipe Rodríguez	**PERIODO**	Tercero
FECHA DE INICIO	Julio 2023	**FECHA DE TERMINACIÓN**	Septiembre 2023
COMPETENCIA	**Competencia General:** Comprender el concepto inicial de límite.		
	Competencia Específica: Resolver límites aplicando las propiedades y comprender su uso en situaciones reales.		
DESEMPEÑOS	**PARA APRENDER**	Entender el concepto de límite y límites laterales para hallar la solución a un problema propuesto.	
	PARA HACER	Resolver límites aplicando diferentes estrategias.	
	PARA SER	Lograr que el estudiante sea responsable y autónomo en la entrega de trabajos.	
	PARA CONVIVIR	Reconoce la importancia de la aplicación de conceptos matemáticos al mejoramiento de su entorno.	
ESTÁNDAR	Establezco relaciones y diferencias entre notaciones de números reales para decidir sobre su uso en una situación dada.		
DBA	Usa propiedades y modelos funcionales para analizar situaciones y para establecer relaciones funcionales entre variables que permiten estudiar la variación en situaciones intraescolares y extraescolares		

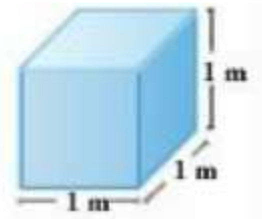
INTRODUCCIÓN

Los griegos utilizaron unidades de medida de volumen llamadas “secas” para medir la cantidad de grano almacenado en un recipiente. Una unidad que fue bastante utilizada se llamaba *cotyla* y equivalía a $0{,}274\ dm^3$.

VOLUMEN

El volumen es la medida del espacio que ocupa un cuerpo. Para medir el volumen se utilizan medidas cúbicas.





La unidad básica en el sistema métrico decimal es el metro cúbico, que se simboliza $\boldsymbol{m^3}$**.** El metro cúbico corresponde al volumen de un cubo cuya arista tiene un metro de longitud.

Los múltiplos del metro cúbico son:

Nombre	Símbolo	Equivalencia
Miriámetro cúbico	mam^3	$1.000.000.000.000\ m^3$
Kilómetro cúbico	km^3	$1.000.000.000\ m^3$
Hectómetro cúbico	hm^3	$1.000.000\ m^3$
Decámetro cúbico	dam^3	$1.000\ m^3$

Los submúltiplos del metro cúbico son:

Nombre	Símbolo	Equivalencia
decímetro cúbico	dm^3	$0,001\ m^3$
centímetro cúbico	cm^3	$0,000001\ m^3$
milímetro cúbico	mm^3	$0,000000001\ m^3$

EJEMPLO

El volumen de una bola de billar es aproximadamente 974.347 mm^3. ¿Cuál es el volumen de la bola de billar en centímetros cúbicos?

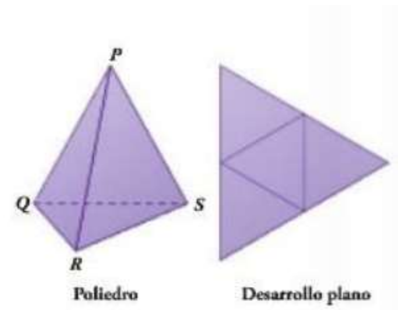
Como mm^3 es una unidad de medida inmediatamente inferior a cm^3, entonces, se divide entre 1.000 para realizar la conversión. Por tanto, el volumen de la bola de billar es de 974,347 cm^3.

POLIEDROS

Un poliedro es un sólido limitado por superficies planas llamadas caras.

Los elementos del poliedro son:

- **Caras**: Son los polígonos que limitan el poliedro. En el poliedro que se muestra las caras están conformadas por los vértices: PQR, PRS, PQS y QRS.
- **Aristas**: Son los lados que conforman cada cara. Así, $\overline{PQ}, \overline{PR}, \overline{PS}, \overline{QS}, \overline{QR}$,y $\overline{RS}$.
- **Vértices**: Son los puntos donde concurren varias aristas. Los vértices del poliedro son: P, Q, R y S.



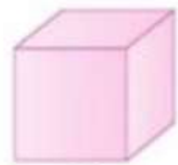
El desarrollo plano de un poliedro es el conjunto de polígonos tales que al unirlos por las aristas forman el poliedro.

PARALELEPIPEDO

Un paralelepípedo es un poliedro formado por seis caras que son paralelogramos, de tal forma que las caras opuestas son paralelas y congruentes.

Un paralelepípedo cuyas caras son rectángulos se denomina **paralelepípedo rectangular** y uno cuyas caras son cuadradas, se denomina **cubo.**

Paralelepipedo rectangular



Cubo

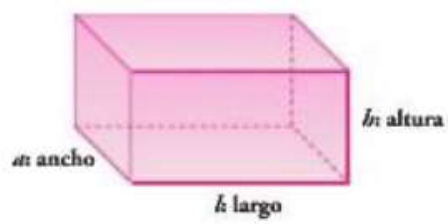
El volumen V del paralelepípedo está dado por la expresión:

$$V = l \times a \times h$$

Donde se multiplican la medida del largo l por la medida del ancho a por la medida de la altura h.

Teniendo en cuenta las mismas variables, se puede calcular el área total A_T de la superficie del paralelepípedo mediante la siguiente expresión.

$$A_T = 2al + 2hl + 2ah$$



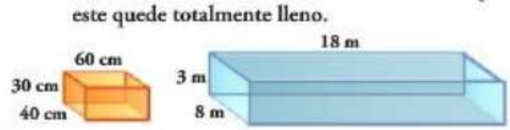
Afianzo COMPETENCIAS

S Cierto tipo de cereal viene en cajas cuyas dimensiones se muestran a continuación.

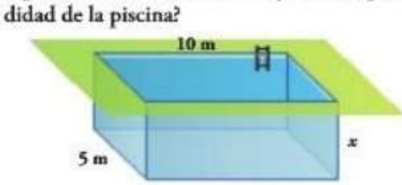
47. Determina cuál es la presentación que resulta más económica por centímetro cúbico.

48. Halla la cantidad de centímetros cuadrados que se necesitan para la fabricación de cada caja.

S 49. La figura muestra las dimensiones de un contenedor y de las cajas que se van a almacenar en él. Determina la cantidad de cajas que se pueden almacenar en el contenedor de tal forma que este quede totalmente lleno.



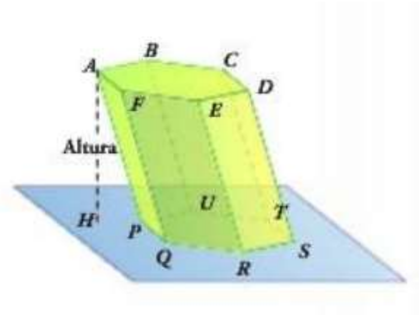
S 50. Supón que la piscina que se muestra en la figura tiene forma de paralelepípedo. Si el volumen de la piscina es de 125.000 dm³, ¿cuál es la profundidad de la piscina?



PRISMA

Un prisma es un poliedro limitado por dos polígonos congruentes (mismas medidas, mismas propiedades) y paralelos, llamados bases y varios paralelogramos llamados caras laterales.

En el Prisma que se muestra, las bases son los hexágonos $ABCDEF$ y $PUTSRQ$. Además, las caras laterales son los paralelogramos $ABUP$, $BCTU$, $CDST$, $DERS$, $EFQR$ y $FAPQ$.



La altura del prisma es el segmento perpendicular al plano que contiene una de las bases y que tiene como punto extremo uno de los vértices de la otra base. En el prisma se muestra que la altura es $\overline{AH}$.

Los prismas se clasifican según la forma de sus caras laterales en prismas rectos y prismas oblicuos.

Prisma Recto: Sus caras laterales son perpendiculares a las bases y tienen forma rectangular.

Prisma Oblicuo: Sus caras laterales no son perpendiculares a las bases y tienen forma de romboide.

Además, los prismas se clasifican según las formas de sus bases en triangular, pentagonal, hexagonal entre otros.

En un prisma se puede calcular el área lateral, el área total y el volumen.

- El **área lateral** (A_L) es la suma de las áreas de las caras laterales. En un prisma recto, el área lateral se calcula multiplicando la altura h por el perímetro de la base P_B.

$$A_L = hP_B$$

- El **área total** (A_T) es la suma del área lateral más la suma de las área de las bases en el caso del prisma recto.

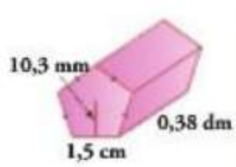
$$A_T = hP_B + 2A_B$$

- El **volumen** (V) es igual al producto del área de la base por la altura.

$$V = A_B h$$

EJEMPLO

Una pieza de acero tiene forma de prisma pentagonal como se indica en la figura. Determinar cuántos centímetros cúbicos de acero se requieren para elaborar 1.000 piezas iguales.



Primero, se expresan todas las medidas en la misma unidad. Por tanto, se tiene que:

- 10,3 mm equivalen a 1,03 cm
- 1,5 cm equivalen a 1,5 cm
- 0,38 dm equivalen a 3,8 cm

Segundo, se calcula el área de la base del prisma (A_B). Para esto, se divide entre 2 el producto del perímetro de la base por la medida del apotema (a).

$$A_B = \frac{a \times P_B}{2} = \frac{1,03 \times 7,5}{2} = 3,8625\,\text{cm}^2$$

Luego, se multiplica el área de la base por la altura, para calcular el volumen (V).

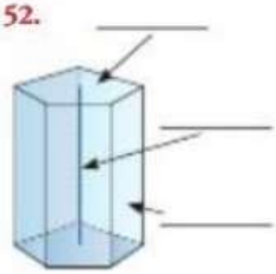
$V = 3,8625 \times 3,8 = 14,6775$

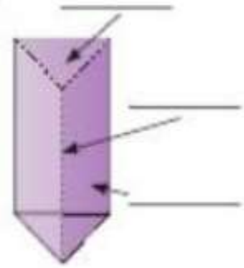
Finalmente, se multiplica el volumen por 1.000, de donde se concluye que se necesitan 14.677,5 cm³ de acero para elaborar las 1.000 piezas.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Ejercito · Soluciono problemas

Escribe los elementos del prisma en cada figura.

52. 

53. 

Completa las siguientes expresiones relacionadas con las medidas de un prisma. Ten en cuenta que A_B es el área de la base, A_L es el área lateral, A_T es el área total, h es la altura y V, el volumen.

54. $A_L +$ ______ $= A_T$

55. ______ $\times h = V$

56. $A_T -$ ______ $= A_L$

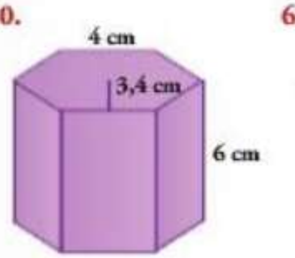
57. $V \div A_B =$ ______

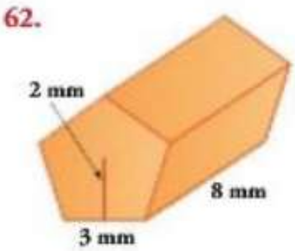
Calcula el área total de los prismas con base regular, de acuerdo con las condiciones dadas.

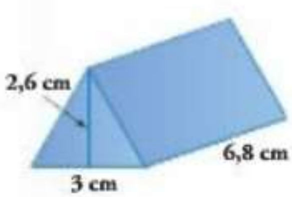
58. Base triangular de lado 5 cm
    Altura del triángulo: 4,3 cm
    Altura del prisma: 8,5 cm

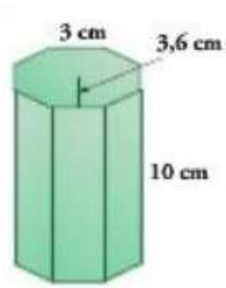
59. Base pentagonal de lado 4 cm
    Apotema del pentágono: 0,27 dm
    Altura del prisma: 0,12 m

Halla el volumen de los siguientes prismas teniendo en cuenta que sus bases son polígonos regulares.

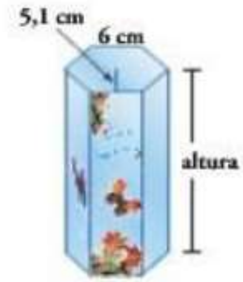
60. 

62. 

61. 

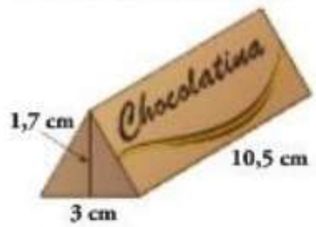
63. 

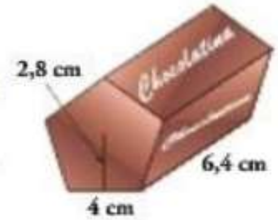
64. Un empaque para un perfume tiene forma de prisma hexagonal. Determina la altura del empaque de acuerdo con las medidas indicadas en la figura.



Volumen: 780,3 cm^3

Dos empaques de chocolatinas vienen en dos presentaciones: una en forma de prisma pentagonal y la otra en forma de prisma triangular, como se muestra en las siguientes figuras.

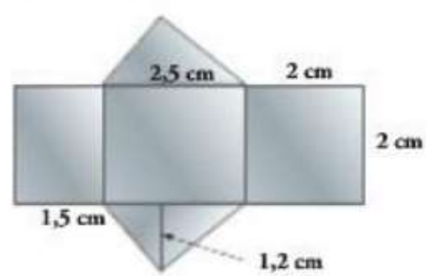




65. Determina cuál es el empaque que tiene mayor volumen, teniendo en cuenta que las bases son polígonos regulares.

66. Una fábrica de accesorios diseñó portalápices utilizando tres prismas hexagonales como se muestra en la figura. Si se sabe que el volumen de los tres prismas es de 960 cm^3 y el área de la base de cada prisma es 64 cm^2, determina la altura del portalápices.

Se quiere fabricar 50 recipientes en aluminio con láminas como las que se muestran a continuación.



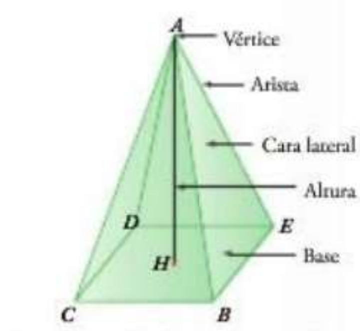
67. ¿Cuál es el volumen de cada recipiente?

PIRÁMIDES

Una pirámide es un poliedro formado por una base y varias caras laterales. La base es un polígono y las caras laterales son triángulos que concurren en un vértice común.

Los elementos de una pirámide se muestran en la figura, entre estos elementos se tienen:

- **Caras Laterales**: Son los triángulos que concurren en el vértice de la pirámide. En este caso, las caras laterales son ΔAED, ΔADC, ΔACB y ΔABE.
- **Base**: Es el polígono de la pirámide que no contiene el vértice. En este caso, la base de la pirámide es el cuadrilátero $BCDE$.
- **Altura**: Es el segmento perpendicular al plano que contiene a la base que tiene como uno de sus puntos extremos el vértice de la pirámide.



La clasificación de las pirámides es a similar a los prismas. Es decir, de acuerdo con su base, las pirámides pueden ser triangulares, pentagonales, hexagonales, entre otros. Además, si las bases son polígonos regulares se dice que la pirámide es **regular**, si no cumple esta condición se dice que es una pirámide irregular. Por otra parte, las pirámides también pueden ser **rectas** y **oblicuas**.

En una pirámide regular se puede calcular el área lateral (A_L), el área total (A_T) y el volumen (V) mediante las siguientes expresiones:

$A_L = nA$, donde n es el número de lados de la base y A el área de una de las caras laterales.

$A_T = A_B + A_L$, donde A_B es el área de la base.

$V = \frac{1}{3}(A_B \times h)$, donde h es la altura de la pirámide.

EJEMPLO

La pirámide de Kefrén o la Gran Pirámide es una pirámide de base cuadrada ubicada en El Cairo (Egipto), que data del siglo XXVI a. C. Según las medidas que aparecen en la fotografía, ¿cuál es el área lateral de la pirámide de Kefrén?

Primero, se calcula el área A de cada cara lateral. Como cada cara lateral es un triángulo, entonces, su área es igual a la mitad del producto de la medida de la arista de la base por la altura de la cara.

Luego, se tiene que $A = \frac{179,36 \times 143,49}{2} \approx 12.868,18$.

Finalmente, se multiplica por 4, que es el número de lados de la base, para hallar el área lateral.

$$A_L = 4 \times 12.868,18$$
$$= 51.472,72 \text{ m}^2$$

Por tanto, el área lateral de la pirámide de Kefrén es aproximadamente 51.472,72 m².

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Ejercito · Soluciono problemas

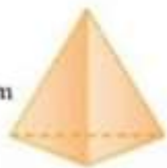
Responde.

68. Si un prisma y una pirámide tienen como base un hexágono regular, ¿puede el prisma tener más caras laterales que la pirámide? Justifica tu respuesta.

69. Si la base de una pirámide es un cuadrilátero, ¿cuántas aristas tiene la pirámide?

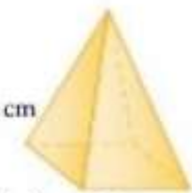
Calcula el volumen de cada pirámide si se sabe que las bases son polígonos regulares.

70. $h = 4$ cm



Área de la base: 2,5 cm²

72. $h = 6,5$ cm



Lado de la base: 3,2 cm

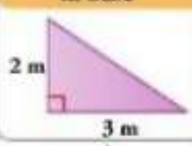
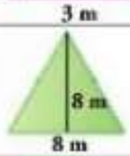
71. $h = 8,5$ cm

Área de la base: 12 cm²

73. $h = 10$ cm

Lado del hexágono: 6 cm.
Apotema del hexágono: 5,2 cm

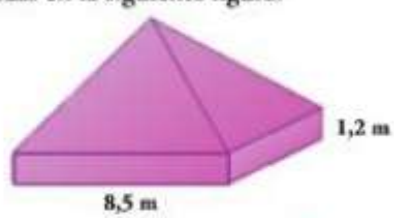
74. **Determina el volumen de las siguientes pirámides de acuerdo con los datos de la tabla. Explica el procedimiento que utilizas en cada caso.**

Forma de la base	Altura de la pirámide (m)	Volumen (m^3)
	4,5 m	
	12,5 m	
	15 m	
	8,5 m	

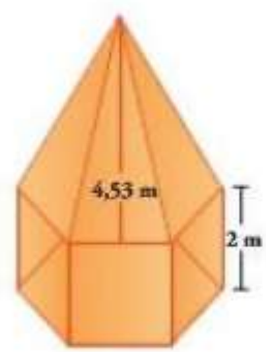
75. **En la parte exterior del Museo del Louvre se puede observar una pirámide de base cuadrada con 140 m de perímetro. Determina el área lateral de la pirámide si se sabe que la altura de una de sus caras laterales es de 72,97 m.**

76. **Escribe las medidas correspondientes a una pirámide y a un prisma que tienen la misma base y la misma altura. Luego, compara sus volúmenes y sus áreas laterales.**

77. **La arquitectura japonesa incorpora cuerpos geométricos para buscar soluciones de vivienda. Una de las más conocidas es la casa pirámide negra, que está formada por un paralelepípedo y una pirámide de base cuadrada. Si el volumen de una casa pirámide negra es de 231,2 m³, ¿cuál es su altura total teniendo en cuenta las medidas mostradas en la siguiente figura?**



La cúpula de una iglesia está formada por un prisma hexagonal recto y una pirámide recta, como se muestra en la figura. La distancia del centro de la base del prisma a cada uno de sus lados es de 3,4 m y su perímetro es de 24 m.



78. Calcula el área lateral de la cúpula.

79. Si el volumen total de la cúpula es de 122,4 m³ y el volumen del prisma es de 81,6 m³, calcula la altura de la pirámide que conforma la cúpula.

POLIEDROS REGULARES

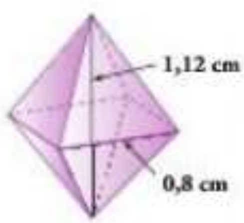
Los poliedros regulares son aquellos cuyas caras son polígonos regulares y congruentes.

Los cinco poliedros regulares y sus características se muestran en la siguiente tabla:

Poliedro regular	Polígono de sus caras	Número de caras que concurren en un vértice	Número de caras en total
 Tetraedro regular	 Triángulo equilátero	3	4
 Hexaedro regular	 Cuadrado	3	6
 Octaedro regular	 Triángulo equilátero	4	8
 Dodecaedro regular	 Pentágono regular	3	12
 Icosaedro regular	 Triángulo equilátero	5	20

EJEMPLO

Un diamante tiene forma de octaedro regular, con las medidas que se indican en la figura. Determinar el costo del diamante si se sabe que cada cm³ de diamante de esta calidad tiene un valor de $12.000.000.



Primero, el octaedro está formado por dos pirámides de base cuadrada. Así, la altura de cada pirámide es:

$1{,}12 \div 2 = 0{,}56$ cm y el lado de su base es 0,8 cm.

Luego, se calcula el volumen del octaedro multiplicando por 2 el volumen de una de las pirámides y teniendo en cuenta que el área de la base A_B es 0,64 cm² y la altura h es 0,56 cm.

$$V = 2 \times \left(\frac{1}{3} A_B h\right)$$
$$= 2 \times \left(\frac{1}{3}(0,64)(0,56)\right) \approx 0,239$$

Finalmente, se multiplica el volumen del octaedro por 12.000.000. Por tanto, el costo del diamante en pesos es:

$0{,}239 \times 12.000.000 = 2.868.000$

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Ejercito · Razono · Soluciono problemas

Completa cada enunciado.

80. Un octaedro regular se puede formar a partir de dos __________ de base __________.

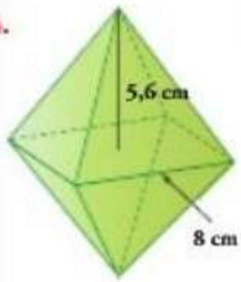
81. Un hexaedro regular es un __________ porque todas sus aristas tienen __________ medida.

82. Un dodecaedro regular tiene __________ caras y cada una de ellas es un __________ regular.

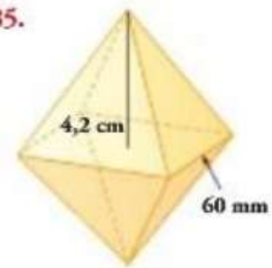
83. Las caras de un icosaedro regular son triángulos __________.

Calcula el volumen de cada octaedro regular.

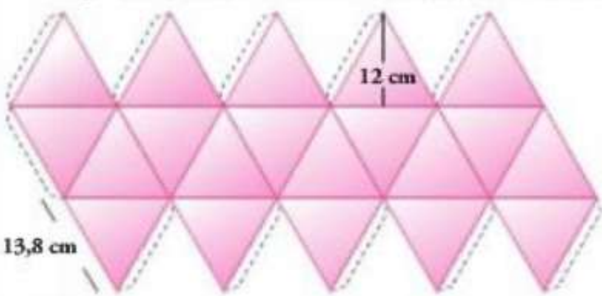
84.



85.

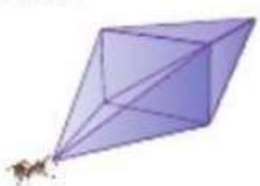


86. **Calcula el área de la superficie del icosaedro regular cuyo desarrollo se muestra a continuación.**



87. **Halla el área de la superficie de un dodecaedro regular de 8 cm de arista, si cada pentágono correspondiente a sus caras tiene 5,5 cm de apotema.**

88. **Una hormiga se encuentra en un vértice de un octaedro y decide recorrer todas sus aristas sin pasar dos veces por la misma arista. Indica un posible camino.**



Determina cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles son falsas. Justifica tu respuesta.

89. En un octaedro regular las caras pueden ser triángulos isósceles.

90. Un dodecaedro regular tiene 24 vértices.

91. Un hexaedro es un paralelepípedo.

92. Un icosaedro regular tiene 30 aristas.

93. **El matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783) propuso la fórmula $C + V - A = 2$, en la que C es el número de caras de un poliedro, V es el número de vértices y A es el número de aristas de un poliedro. Completa la siguiente tabla. Luego, verifica que se cumpla la fórmula de Euler.**

	Caras	Vértices	Aristas
Tetraedro 			
Cubo 			
Dodecaedro 			
Icosaedro 			

Un hexaedro truncado es un cubo al cual se le han cortado las esquinas en igual medida, como se muestra en la figura. Completa.

94. Número de caras: ______

95. Números de aristas: ______

96. Número de vértices: ______

97. **Escribe un problema relacionado con el volumen de un octaedro. Luego, resuélvelo aplicando las expresiones para calcular el volumen de una pirámide.**

CUERPOS REDONDOS

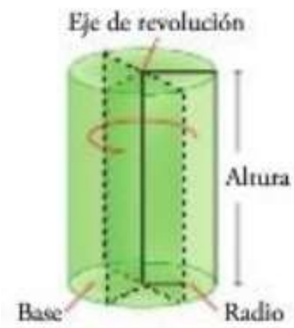
Un cuerpo redondo es un sólido limitado por superficies curvas o por superficies planas y curvas. Los principales cuerpos redondos son el cilindro, el cono y la esfera.

CILINDRO

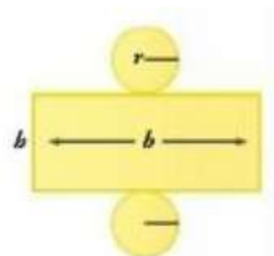
Un cilindro es un cuerpo redondo limitado por una superficie curva y dos caras planas circulares.

Los cilindros se clasifican en rectos y oblicuos. Un cilindro recto se conoce como un sólido de revolución ya que se obtiene al girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados, el cual se denomina **eje de revolución**.

Los elementos del cilindro son:



- **Bases:** Son las caras planas circulares que conforman el cilindro.
- **Altura:** Es la medida del segmento perpendicular trazado desde una base hacia el plano que contiene la otra base. Se simboliza con la letra h.
- **Radio:** Es la medida del radio de cada base. Se simboliza con la letra r.



El desarrollo de un cilindro corresponde a dos círculos de igual radio y a un rectángulo cuyo ancho es igual a la altura del cilindro, y cuya base es igual a la longitud de la circunferencia de la base. A partir del desarrollo del cilindro se puede calcular su área lateral, área total y volumen.

Las siguientes son las fórmulas para hallar el volumen, el área lateral y el área total:

$$V = \pi r^2 h \qquad A_L = 2\pi r h \qquad A_T = 2\pi r(h + r)$$

EJEMPLO

La Torre Westhafen construida en la ciudad de Fráncfort (Alemania) es una torre con forma cilíndrica que cuenta con 31 pisos, cada uno con aproximadamente 3,5 m de altura. Si la longitud de la circunferencia de la base mide 119,32 m, determinar el área de su superficie exterior.

Primero, se determina la altura total de la torre. Para esto, se multiplica el número total de pisos por la altura de cada uno. Así, la altura total es:

$$31 \times 3{,}5 \text{ m} = 108{,}5 \text{ m}$$

Segundo, se halla el radio de la base despejando r en la expresión de la longitud de la circunferencia. $r = \frac{c}{2\pi}$ de donde $r = \frac{119{,}32}{2\pi} \approx 19$ m

Luego, se calcula el área lateral A_L y el área de la base superior A_B remplazando los valores de r y h. Así: $A_L = 2\pi(19)(108{,}5) \approx 12.952{,}79$ y $A_B = \pi(19^2) \approx 1.134{,}11$

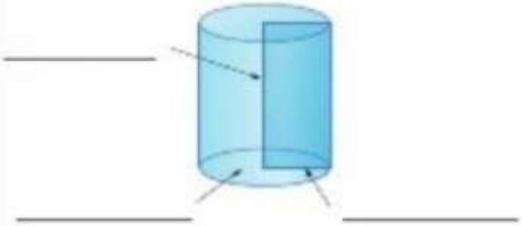
Finalmente, el área de la superficie exterior de la torre es:

$$12.952{,}79 + 1.134{,}11 = 14.086{,}9 \text{ m}^2$$

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Ejercito · Razono · Soluciono problemas

98. Escribe los elementos del cilindro que se indican en la figura.



Calcula el volumen aproximado de cada cilindro a partir de las medidas dadas.

99. Radio: 3 cm, altura: 6 cm

100. Diámetro: 4 cm, altura: 5 cm

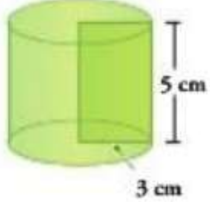
101. Radio: 7 cm, altura: 10,5 cm

102. Diámetro: 24 cm, altura: 25 cm

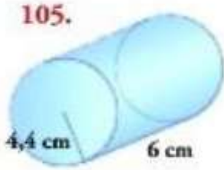
103. Radio: 6,5 cm, altura: 10 cm

Halla el área total de los siguientes cilindros.

104.



105.



106. A continuación se muestran dos recipientes cilíndricos *A* y *B* de una misma bebida. Explica por qué la bebida *A* es más económica que la *B*, a partir del volumen de los recipientes.

Bebida A
Precio: $2.850

Bebida B
Precio: $2.700

Halla el área total de cada cilindro a partir de su altura *h*, si se sabe que el radio equivale a la tercera parte de la altura.

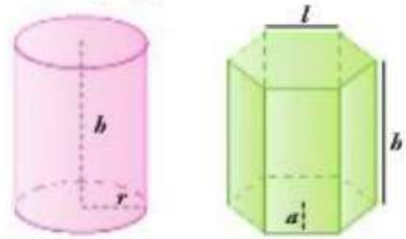
107. $h = 9$ cm

108. $h = 7{,}8$ cm

109. $h = 13{,}2$ cm

110. $h = 22{,}5$ cm

111. Propón medidas para el cilindro y el prisma hexagonal recto. Luego, compara sus volúmenes teniendo en cuenta que la altura *h* de ambos cuerpos geométricos es la misma.



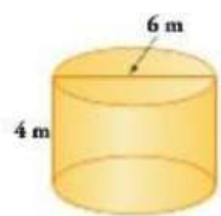
112. Calcula el volumen del cilindro que se genera al girar un rectángulo de 3,5 cm de ancho y 5,8 cm de alto respecto a su altura.

El cilindro fonográfico fue el primer método utilizado para grabar y reproducir sonidos. Hacia el año 1890, algunas empresas decidieron estandarizar las medidas de los cilindros; fue así como se produjeron cilindros fonográficos de 10 cm de altura y 5,7 cm de diámetro.

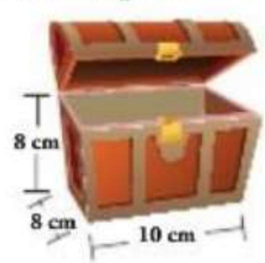
113. ¿Cuál era el volumen de un cilindro fonográfico?

114. ¿Cuál era el área total?

115. Un estanque con forma cilíndrica tiene una altura de 4 m y un diámetro de 6 m. Si solo está lleno hasta 3,5 m de altura, ¿cuántos metros cúbicos faltan para llenar completamente el estanque?



116. María utilizó una tela para forrar el siguiente cofre. ¿Cuántos metros cuadrados de tela como mínimo debió emplear?



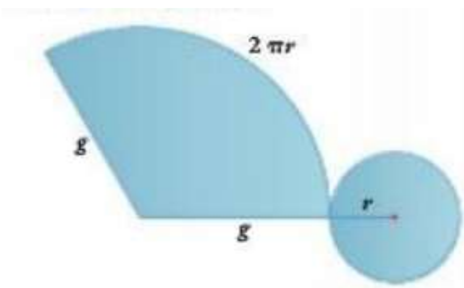
CONO

Figura 2. Elementos de un cono.

Un cono es un cuerpo redondo limitado por una superficie curva y una cara plana circular

Los conos se clasifican en rectos y oblicuos. Un cono se puede considerar como un sólido de revolución ya que se obtiene al girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos. Este cateto se denomina eje de revolución y la hipotenusa del triángulo se denomina como generatriz y se simboliza con la letra g.

Otros elementos del cono se muestran a continuación:



- **Base:** Es la cara plana circular del cono
- **Vértice:** Es el punto extremo del eje de revolución que no está en la base del cono.
- **Altura:** Es la medida del segmento perpendicular trazado desde el vértice hasta el plano que contiene la base. Se simboliza con la letra h**.**
- **Radio:** Es la medida del radio de la base. Se simboliza con la letra r**.**

El desarrollo de un cono corresponde a un círculo de radio r y a un sector circular. Para calcular el área lateral, el área total y el volumen se aplican las siguientes fórmulas:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \qquad A_L = \pi r g \qquad A_T = \pi r(r + g)$$

EJEMPLO

Una empresa fabrica conos de helado. La siguiente tabla muestra las diferentes clases de conos que producen. Suponiendo que los conos son rectos, determinar el precio de venta de cada tipo de cono si cada cm³ se vende a $80.

Nombre	Altura (mm)	Diámetro (mm)
Cono mini	88	38
Cono danés	138	45

Primero, se convierten las medidas a centímetros dividiendo cada medida entre 10, así:

$88 \div 10 = 8{,}8 \qquad 38 \div 10 = 3{,}8 \qquad 138 \div 10 = 13{,}8 \qquad 45 \div 10 = 4{,}5$

Luego, el radio del cono mini es de 1,9 cm y el del cono danés es de 2,25 cm. Por tanto, para calcular el volumen de ambos tipos de conos se remplazan las medidas de los radios y de las alturas en la expresión $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

$V_m = \frac{1}{3}\pi(1{,}9)^2(8{,}8) \approx \frac{99{,}8}{3} \approx 33{,}27$ Volumen del cono mini.

$V_d = \frac{1}{3}\pi(2{,}25)^2(13{,}8) \approx \frac{219{,}48}{3} \approx 73{,}16$ Volumen del cono danés.

Finalmente, se multiplica el volumen de cada cono por el precio de cada centímetro cúbico.

$33{,}27 \times 80 = 2.661{,}6$ Costo del cono mini.

$73{,}16 \times 80 = 5.852{,}8$ Costo del cono danés.

Por tanto, el precio de venta aproximado del cono danés es $5.852 y el del cono mini es $2.661.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

Dibuja en tu cuaderno un cono recto de 4 cm de altura y 3 cm de radio. Luego, responde.

117. ¿Cuánto mide la generatriz?

118. ¿Cuál es el perímetro de la base?

Calcula el volumen y el área total de cada cono teniendo en cuenta que h es la altura, r es el radio de la base y d es el diámetro.

119. $r = 2$ cm, $h = 4$ cm

120. $d = 10$ cm, $h = 15$ cm

121. $r = 8$ cm, $h = 12$ cm

Resuelve.

122. Completa la tabla.

Altura	Radio	Volumen del cilindro	Volumen del cono
7,5 cm	4 cm		
10 cm	5,2 cm		
20 m	10 m		

123. Responde. ¿Cuál es la razón entre el volumen de un cilindro y el volumen de un cono que tienen la misma altura y el mismo radio?

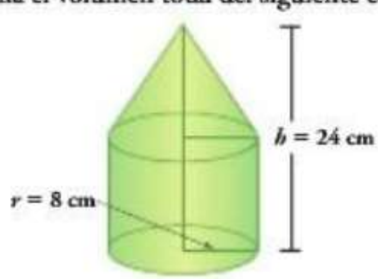
Determina cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles son falsas. Justifica tu respuesta.

124. Si se duplica el radio de un cono, entonces, se cuadruplica su volumen.

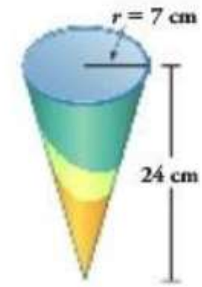
125. Si se divide entre 3 la medida de la generatriz de un cono, entonces, su área lateral se duplica.

126. Si se divide entre 2 el perímetro de la base de un cono, entonces, el área lateral del cono es igual al producto del perímetro de la base dividido entre 2 por la medida de la generatriz.

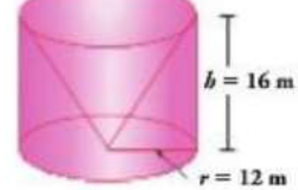
127. Calcula el volumen total del siguiente cuerpo.



128. **Para su fiesta, Roberto planea entregar sorpresas con forma de cono a sus 20 invitados. Si tiene 3 m^2 de cartulina, ¿le alcanzará para elaborar todas las sorpresas? Justifica tu respuesta.**



Un tanque de forma cónica está construido en el interior de una estructura cilíndrica, como se muestra en la siguiente figura.

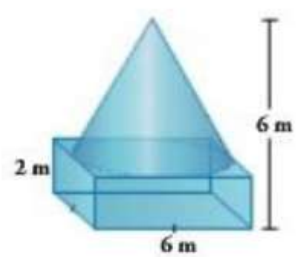


129. Calcula la diferencia entre el volumen de la estructura cilíndrica y el volumen del tanque.

130. Supón que se quiere pintar el interior del tanque y la parte externa de la estructura cilíndrica. Si no se tiene en cuenta el grosor del tanque y de la estructura, ¿cuántos metros cuadrados deben pintarse?

131. Escribe una fórmula para calcular la suma de los volúmenes de un cono y de un cilindro que tienen el mismo radio r y la misma altura h.

Una escultura elaborada en bronce está formada por un cono y un pedestal en forma de paralelepípedo, como se muestra en la siguiente figura.



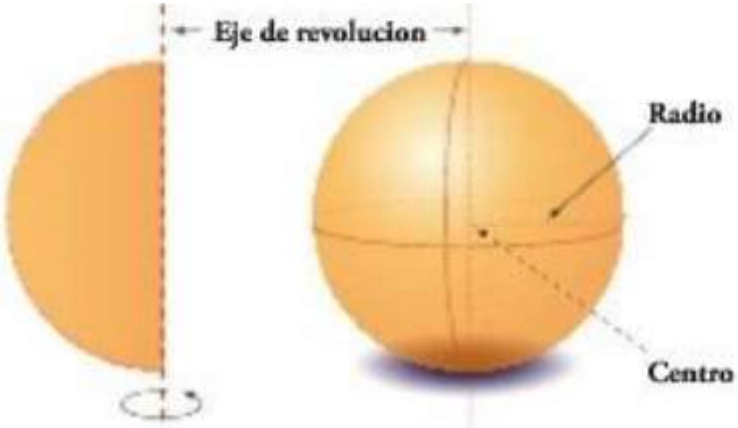
132. Calcula cuántos metros cúbicos de bronce se necesitan para elaborar la escultura.

133. Una pintora cobra $38.000 por decorar cada metro cuadrado de la superficie de la escultura. ¿Cuánto se le debe pagar a la pintora para que decore toda la escultura?

ESFERA

Una esfera es un cuerpo redondo limitado por una sola superficie curva

La esfera también es un sólido de revolución que se obtiene al hacer girar un semicírculo alrededor de su diámetro. Dicho diámetro es el eje de revolución.



Los elementos de una esfera son:

- **Centro:** Es el punto que se encuentra a igual distancia de todos los puntos que conforman la superficie de la esfera. Se simboliza con la letra C.
- **Radio:** Es la distancia del centro a cualquier punto de la superficie de la esfera. Se simboliza con la letra r.

El volumen y el área superficial de la esfera se encuentran con las expresiones:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ y } A = 4\pi r^2$$

EJEMPLOS

Para adornar el patio de una antigua edificación se construyó una esfera de piedra de 1,6 m de diámetro.

a. Si se quiere aplicar estuco veneciano en la esfera y cada metro cuadrado cuesta $32.000, ¿cuánto cuesta aplicar estuco veneciano en toda la esfera?

Primero, como el diámetro de la esfera es de 1,6 m, entonces, el radio mide 0,8 m.

Luego, se remplaza la medida del radio para calcular el área de la superficie de la esfera.

$A = 4\pi r^2$ Área de la superficie de la esfera.

$= 4\pi(0,8)^2$ Se remplaza la medida del radio.

$\approx 8,04$ Se resuelven las operaciones.

Finalmente, se tiene que el área de la superficie de la esfera es de aproximadamente 8,04 m^2. Por tanto, al multiplicar por $32.000, resulta que el costo de aplicar estuco veneciano en la esfera es de $257.280.

b. Calcular la masa total de la esfera si se sabe que la masa de cada m^3 de piedra con que fue construida pesa aproximadamente 900 kilos.

Primero, se calcula el volumen de la esfera.

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$ Volumen de la esfera.

$= \frac{4}{3}\pi(0,8)^3$ Se remplaza la medida del radio.

$= \frac{4}{3}\pi(0,512)$ Se resuelve la potencia.

$\approx 2,14 \text{ m}^3$ Se multiplica.

Luego, se plantea la siguiente proporción:

$$\frac{1}{900} = \frac{2,14}{x} \begin{array}{l} \text{— Metros cúbicos} \\ \text{— Masa} \end{array}$$

Finalmente, se despeja x.

$x = 900 \times 2,14 = 1.926$

Por tanto, la masa total de la esfera es aproximadamente 1.926 kilogramos.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Soluciono problemas

Observa la siguiente representación de la Tierra como una esfera. Luego, completa.

134. El eje terrestre es el eje de ____________ de la esfera.

135. Las dos líneas que representan circunferencias máximas en la esfera son el ____________ y el ____________.

136. El ____________ no es una circunferencia máxima de la esfera.

137. La distancia entre el Polo Norte y el Polo Sur representa el ____________ de la esfera.

Calcula el área y el volumen de cada esfera a partir de su radio r.

138. $r = 2$ cm

139. $r = 5$ cm

140. $r = 3{,}5$ dm

141. $r = 48$ mm

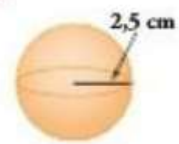
142. Completa la tabla.

r (cm)	$2r$	Volumen de la circunferencia de radio r	Volumen de la circunferencia de radio $2r$
1			
2			
3			
4			

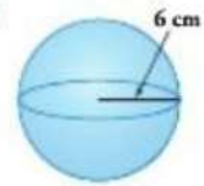
143. Escribe una expresión general para calcular la variación del volumen de una esfera cuando se duplica la medida de su radio r.

Halla el área aproximada de la superficie de cada esfera.

144.



145.



146. Explica qué ocurre con el volumen de una esfera si se cuadruplica el área de su superficie.

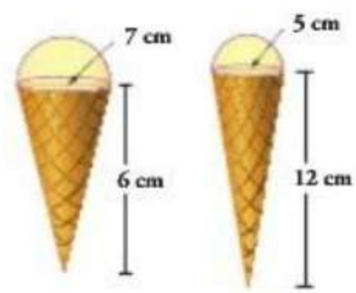
Dos importantes construcciones del mundo tienen forma esférica: el Globo de Ericsson (Suecia) y el Centro Cultural Tijuana (México).

Edificación	Radio en metros
Globo Ericsson	55
Centro Cultural Tijuana	13

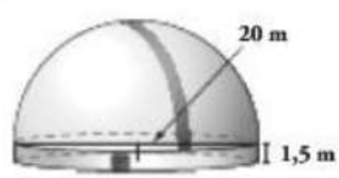
147. Determina el volumen de cada construcción.

148. Calcula el área de la superficie de cada edificación.

149. Supón que las siguientes figuras representan conos de helado. Calcula el precio de los conos si cada cm³ de helado vale \$20 y el precio de venta de la galleta es \$40 por cm².



150. Un observatorio astronómico tiene la forma que se muestra en la figura. ¿Cuál es su área lateral?



A finales del siglo XVIII y comienzos del siglo XIX se inició el desarrollo de la teoría de los límites para fundamentar el análisis matemático. Sin embargo, desde la antigüedad se aplicó el concepto de límite para resolver diversos problemas. Uno de ellos es el de hallar el área de la superficie delimitada por una función positiva, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$.

Este problema se resuelve mediante las sumas de los rectángulos, de tal forma que si el número de rectángulos es cada vez mayor, entonces la suma de las áreas de los rectángulos se aproximará cada vez más al área buscada.

LÍMITES

Una Noción Intuitiva. Considere la función definida por

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

Observe que no está definida en $x = 1$, ya que en este punto $f(x)$ tiene la forma que carece de significado. Sin embargo, aún podemos preguntarnos qué le está sucediendo a $f(x)$ cuando x se aproxima a 1. Con mayor precisión, ¿cuándo x se aproxima a 1, $f(x)$ se está aproximando a algún número específico? Para obtener la respuesta podemos hacer tres cosas: calcular algunos valores de $f(x)$ para x cercana a 1; mostrar estos valores en un diagrama esquemático, y bosquejar la gráfica de $y = f(x)$.

x	$y = \frac{x^3-1}{x-1}$
1.25	3.813
1.1	3.310
1.01	3.030
1.001	3.003
↓	↓
1.000	?
↑	↑
0.999	2.997
0.99	2.970
0.9	2.710
0.75	2.313

Tabla de valores

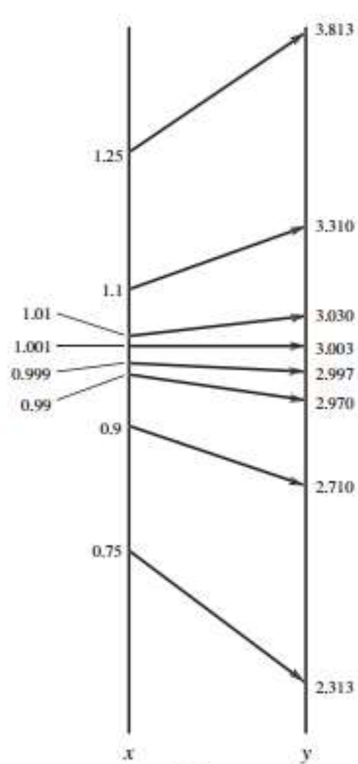
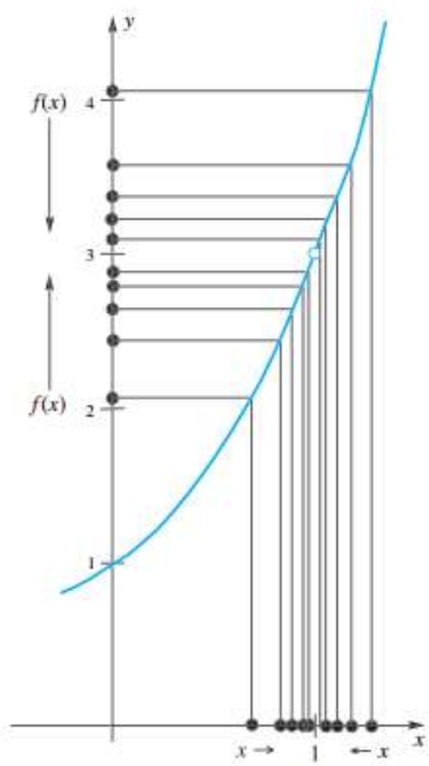


Diagrama esquemático



Gráfica de $y = f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$

Toda la información que hemos reunido parece apuntar a la misma conclusión: $f(x)$ se aproxima a 3 cuando x se aproxima a 1. En símbolos matemáticos, escribimos:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

Esto se lee "el límite de $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$ cuando x tiende a 1 es igual a 3".

Definición Significado intuitivo de límite

Decir que $\lim_{x \to c} f(x) = L$ significa que cuando x está cerca pero diferente de c, entonces $f(x)$ está cerca de L.

Ejemplos:

1. Determine $\lim_{x \to 3} 4x - 5$

   Cuando x está cerca de 3, 4x-5 está cerca de $4 * 3 - 5 = 7$ Escribimos:

   $$\lim_{x \to 3} 4x - 5 = 7$$

2. Encuentre $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-x-6}{x-3}$

   Observe que $(x^2 - x - 6)/(x - 3)$ no está definida en x=3, pero todo está bien. Para tener una idea de lo que está sucediendo cuando x se aproxima a 3, podríamos emplear una calculadora para evaluar la expresión dada; por ejemplo, en 3.1, 3.01, 3.001, etcétera. Pero es mucho mejor utilizar un poco de álgebra para simplificar el problema.

Límites Laterales

Las aproximaciones que se realizan para determinar el límite de una función se relacionan con el concepto de **límite central**.

Los límites laterales se representan de formas distintas, según si la aproximación se realiza por la izquierda o por la derecha.

Definición Límites por la derecha y por la izquierda

Decir que $\lim_{x \to c^+} f(x) = L$ significa que cuando x está cerca pero a la derecha de c, entonces $f(x)$ está cerca de L. De manera análoga, decir que $\lim_{x \to c^-} f(x) = L$ significa que cuando x está cerca pero a la izquierda de c, entonces $f(x)$ está cerca de L.

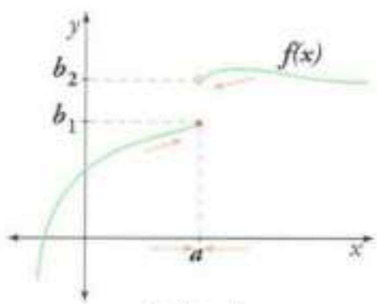
Para entender el concepto de los límites laterales, se tiene en cuenta el siguiente Teorema:

Teorema A

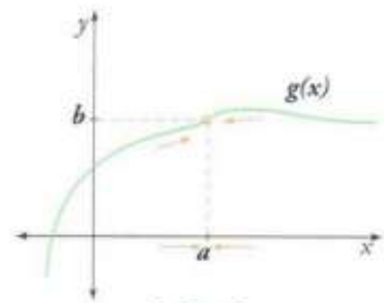
$\lim_{x \to c} f(x) = L$ si y sólo si $\lim_{x \to c^-} f(x) = L$ y $\lim_{x \to c^+} f(x) = L$.

La existencia o no existencia del límite de una función depende de los límites laterales, ya que si los límites laterales existen y son iguales, entonces el límite de la función existe y es igual al valor de los límites laterales. En cambio, si los límites laterales no existen o son diferentes, entonces, el límite de la función no existe.

Por ejemplo, en la gráfica 1 que se muestra a continuación, se tiene que $\underset{x \to a^-}{\text{Lím}} f(x) = b_1$ y $\underset{x \to a^+}{\text{Lím}} f(x) = b_2$, de donde se deduce que $\underset{x \to a}{\text{Lím}} f(x)$ no existe. Por otra parte, en la gráfica 2, se tiene que $\underset{x \to a^-}{\text{Lím}} g(x) = b$ y $\underset{x \to a^+}{\text{Lím}} g(x) = b$, de donde se deduce que $\underset{x \to a}{\text{Lím}} g(x)$ existe y es igual a b.



Gráfica 1

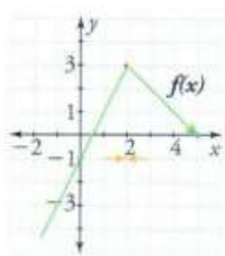


Gráfica 2

EJEMPLOS

1. Determinar el límite indicado en cada caso a partir de la gráfica.

a. $\underset{x \to 2}{\text{Lím}} f(x)$



Primero, se determina el límite por la izquierda.

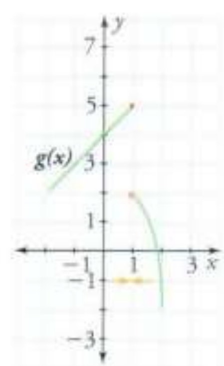
$$\underset{x \to 2^-}{\text{Lím}} f(x) = 3$$

Luego, se halla el límite para la derecha.

$$\underset{x \to 2^+}{\text{Lím}} f(x) = 3$$

Finalmente, se tiene que $\underset{x \to 2}{\text{Lím}} f(x)$ existe y es igual a 3.

b. $\underset{x \to 1}{\text{Lím}} g(x)$



Primero, se determina el límite por la izquierda.

$$\underset{x \to 1^-}{\text{Lím}} g(x) = 5$$

Luego, se halla el límite por la derecha.

$$\underset{x \to 1^+}{\text{Lím}} g(x) = 2$$

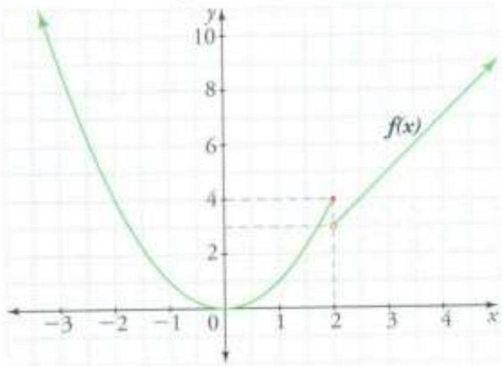
Finalmente, se tiene que $\underset{x \to 1}{\text{Lím}} g(x)$ no existe porque los límites laterales son diferentes.

2. Realizar la gráfica de cada función. Luego, determinar los límites que se indican.

a. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

Primero, se realiza la gráfica de la función.



Luego, se determinan los límites laterales.

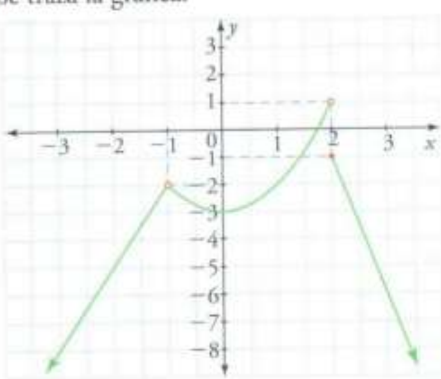
$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 4 \text{ y } \lim_{x \to 2^+} f(x) = 3$$

Finalmente, se tiene que $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ no existe porque los límites laterales son diferentes.

b. $h(x) = \begin{cases} 3x + 1 & \text{si } x < -1 \\ x^2 - 3 & \text{si } -1 < x < 2 \\ 9 - 5x & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to -1} h(x)$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to 2} h(x)$

Primero, se traza la gráfica.



Luego, se calculan los límites laterales en cada punto.

$\lim\limits_{x \to -1^-} h(x) = -2$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 2^-} h(x) = 1$

$\lim\limits_{x \to -1^+} h(x) = -2$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 2^+} h(x) = -1$

Finalmente, se tiene que $\lim\limits_{x \to -1} h(x)$ existe y es igual a -2 porque los límites laterales son iguales. En cambio, $\lim\limits_{x \to 2} h(x)$ no existe porque los límites laterales son diferentes.

3. En el siguiente cartel se muestra el sistema de cobro en un parqueadero.

Parqueadero

Horario 10 a. m. a 10 p. m.

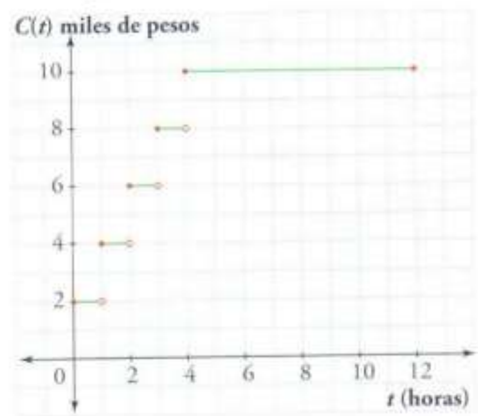
Tarifas

- Cada hora o fracción: $2.000
- Más de 5 horas: $10.000

Estancia máxima 12 horas.

a. **Realizar la gráfica del costo C en función del tiempo t en horas.**

La función C es por partes, por tanto, su representación gráfica es la siguiente:



b. **Calcular el valor de los límites laterales de la función C para tiempos cercanos a una hora e interpretar los resultados.**

Primero, se calcula el límite por la izquierda de 1.

$$\lim_{t \to 1^-} C(t) = 2.000$$

Luego, se determina el límite por la derecha de 1.

$$\lim_{t \to 1^+} C(t) = 4.000$$

Finalmente, se tiene que, para aparcamientos cercanos e inferiores a una hora, el valor a pagar es $2.000 y, para aparcamientos cercanos y superiores a una hora, el valor a pagar es de $4.000.

c. **Determinar el valor de los límites laterales en $t = 4$ y en $t = 5$.**

Los límites laterales para $t = 4$ y $t = 5$ son:

$\lim\limits_{t \to 4^-} C(t) = 8.000$ $\qquad$ $\lim\limits_{t \to 5^-} C(t) = 10.000$

$\lim\limits_{t \to 4^+} C(t) = 10.000$ $\qquad$ $\lim\limits_{t \to 5^+} C(t) = 10.000$

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Ejercito · Razono · Soluciono problemas

Determina si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa, justifica tu respuesta.

25. Si el $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe, entonces, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ también existe.

26. Si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ existen, entonces, $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe.

27. Si $f(a)$ no está definida, entonces, los límites laterales de f en a no existen.

28. $\lim\limits_{x \to 0^-} (3x + 1) = \lim\limits_{x \to 0^+} (3x + 1) = 1$

Considera la función dada por la siguiente expresión

$$f(x) = \begin{cases} 5x + 6 & \text{si } x \leqslant -3 \\ 3x & \text{si } -3 < x < 1 \\ 5 & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 3 \\ x^2 - 4 & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

29. Realiza la gráfica de f.

Determina, en caso de existir, el valor de los siguientes límites.

30. $\lim\limits_{x \to -4^-} f(x)$

31. $\lim\limits_{x \to -4^+} f(x)$

32. $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x)$

33. $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x)$

34. $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$

35. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$

36. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$

37. $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

38. $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$

39. $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$

Elabora, en cada caso, la gráfica de una función que cumpla las condiciones propuestas.

40. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = 3$;

$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -1$; $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 3$;

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2$; $f(0) = 0$; $f(-2) = 1$; $f(1) = 2$

41. $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = 4$; $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) < \lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$; $f(-3) = 3$

42. $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = 3$; $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 4$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ no existe, $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) > \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

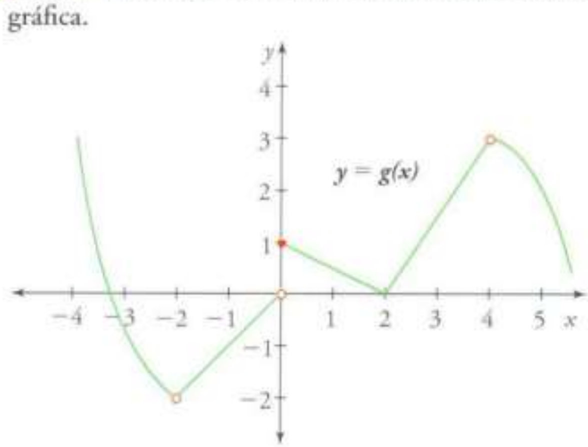
Considera la función parte entera $f(x) = [\![x]\!]$.

43. Si $n \in \mathbb{Z}$, ¿cuánto valen los límites laterales de f en n?

44. ¿Existe $\lim\limits_{x \to n} [\![x]\!]$ con $n \in \mathbb{Z}$?

45. Si $m \notin \mathbb{Z}$, ¿qué ocurre con los límites $\lim\limits_{x \to m^-} [\![x]\!]$ y $\lim\limits_{x \to m^+} [\![x]\!]$?

Determina el valor de los límites de acuerdo con la gráfica.



46. $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x)$

47. $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$

48. $\lim\limits_{x \to -2} g(x)$

49. $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x)$

50. $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x)$

51. $\lim\limits_{x \to 4} g(x)$

Responde las siguientes preguntas.

52. Si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = c$ y $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -c$, ¿para qué valor de c $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe?

53. Si $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = a^2 - 5$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = a + 1$ y además $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existe, ¿cuánto vale $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$?

El servicio de acueducto en una ciudad establece una tarifa básica de \$15.000 más \$2.500 por m^3 consumido. Si el consumo excede los 40 m^3, cada m^3 se cobraría a \$3.000.

54. Modela una función que relacione el valor que se debe pagar en relación con el consumo.

55. ¿A qué valores se acerca el costo, para consumos cercanos a los 40 m^3?

Teoremas de los límites

A continuación se muestran las propiedades de los límites expresados en el siguiente teorema.

Teorema A **Teorema principal de los límites**

Sean n un entero positivo, k una constante y f y g funciones que tengan límites en c. Entonces

1. $\lim\limits_{x\to c} k = k;$
2. $\lim\limits_{x\to c} x = c;$
3. $\lim\limits_{x\to c} kf(x) = k \lim\limits_{x\to c} f(x);$
4. $\lim\limits_{x\to c} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x\to c} f(x) + \lim\limits_{x\to c} g(x);$
5. $\lim\limits_{x\to c} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x\to c} f(x) - \lim\limits_{x\to c} g(x);$
6. $\lim\limits_{x\to c} [f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to c} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to c} g(x);$
7. $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)}$, siempre que $\lim\limits_{x\to c} g(x) \neq 0;$
8. $\lim\limits_{x\to c} [f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x\to c} f(x)\right]^n;$
9. $\lim\limits_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to c} f(x)}$, siempre que $\lim\limits_{x\to c} f(x) > 0$ cuando n sea par.

Ejemplos

A continuación se muestran dos ejemplos donde se aplican las propiedades de los límites

1. Determine $\lim\limits_{x\to 3} 2x^4$

$$\lim_{x\to 3} 2x^4 \overset{(3)}{=} 2 \lim_{x\to 3} x^4 \overset{(8)}{=} 2\left[\lim_{x\to 3} x\right]^4 \overset{(2)}{=} 2[3]^4 = 162$$

2. Determine $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}$

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x^2+9}}{x} \overset{(7)}{=} \frac{\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{x^2+9}}{\lim\limits_{x\to 4} x} \overset{(9,2)}{=} \frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to 4} (x^2+9)}}{4} \overset{(4)}{=} \frac{1}{4}\sqrt{\lim_{x\to 4} x^2 + \lim_{x\to 4} 9}$$

$$\overset{(8,1)}{=} \frac{1}{4}\sqrt{\left[\lim_{x\to 4} x\right]^2 + 9} \overset{(2)}{=} \frac{1}{4}\sqrt{4^2+9} = \frac{5}{4}$$

Límites de funciones indeterminadas

En algunos casos, al aplicar la sustitución directa para calcular un límite, el resultado puede ser que no existe el límite, como $\frac{L}{0}$ o también una indeterminación.

Límites de funciones racionales

Cuando la indeterminación se obtiene en una función racional. La indeterminación se evita, factorizando el numerador y el denominador y luego simplificando los factores comunes.

Ejemplo

Determine el valor del siguiente límite $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$

SOLUCIÓN Sea $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$. No puede hallar el límite al sustituir $x = 1$ porque $f(1)$ no está definido. tampoco puede aplicar la ley del cociente porque el límite del denominador es 0. En lugar de ello, necesita algo de álgebra preliminar. Factorice el numerador como una diferencia de cuadrados:

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

El numerador y el denominador tienen un factor común de $x - 1$. Cuando toma el límite a medida que x tiende a 1, tiene $x \neq 1$ y, por lo tanto, $x - 1 \neq 0$. Por consiguiente, cancele el factor común y calcule el límite como sigue:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

El límite de este ejemplo surgió en la sección 2.1, cuando trató de hallar la tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto $(1, 1)$.

Límites de funciones radicales

Si $f(x)$ o $g(x)$ son funciones radicales y $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ tiene la forma $\frac{0}{0}$, entonces es posible eliminar la indeterminación, racionalizando el numerador o el denominador o ambos y después simplificar la expresión resultante.

Ejemplo

Determine el valor del límite $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x}$

SOLUCIÓN No puede aplicar la ley del cociente de inmediato, puesto que el límite del denominador es 0. En el presente caso, el álgebra preliminar consiste en la racionalización del numerador:

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} &= \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} \cdot \frac{\sqrt{t^2 + 9} + 3}{\sqrt{t^2 + 9} + 3} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{(t^2 + 9) - 9}{t^2\left(\sqrt{t^2 + 9} + 3\right)} = \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{t^2\left(\sqrt{t^2 + 9} + 3\right)} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 9} + 3} = \frac{1}{\sqrt{\lim_{t \to 0} (t^2 + 9)} + 3} = \frac{1}{3 + 3} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

EJEMPLOS

1. Calcular los siguientes límites aplicando las propiedades.

a. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}\right)$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{3}{4}x\right)-\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{2}\right)$$ Se aplica el límite de una diferencia.

$$=\frac{3}{4}\lim_{x\to 2}x-\lim_{x\to 2}\frac{1}{2}$$ Se aplica el límite de una constante por una función.

$$=\frac{3}{4}(2)-\frac{1}{2}$$ Se calcula cada límite.

$$=1$$ Se simplifica.

b. $\lim\limits_{x\to 3}(2x-1)(\sqrt{x+4})$

$$\lim_{x\to 3}(2x-1)(\sqrt{x+4})=\left[\lim_{x\to 3}(2x-1)\right]\cdot\left[\lim_{x\to 3}\sqrt{x+4}\right]$$ Se aplica el límite de un producto.

$$=\left[\lim_{x\to 3}2x-\lim_{x\to 3}1\right]\cdot\left[\sqrt{\lim_{x\to 3}x+4}\right]$$ Se aplica el límite de una diferencia y el límite de una raíz.

$$=\left[\lim_{x\to 3}2x-\lim_{x\to 3}1\right]\cdot\left[\sqrt{\lim_{x\to 3}x+\lim_{x\to 3}4}\right]$$ Se aplica el límite de una suma.

$$=[10-1]\cdot[\sqrt{5+4}]$$ Se calcula cada límite.

$$=27$$ Se resuelven las operaciones.

c. $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ donde $f(x)=\begin{cases}3x-1 & \text{si } x<1\\ x^2 & \text{si } x\geq 1\end{cases}$

Se calculan los límites laterales aplicando el principio de sustitución así:

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}3x-1=3(1)-1=2$$

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}x^2=(1)^2=1$$

Como $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$, entonces $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ no existe.

d. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{4x-3}{2-x}$

Como en este caso si se remplaza $x=-2$ el denominador es diferente de cero, entonces se puede aplicar el principio de sustitución, así:

$$\lim_{x\to -2}\frac{4x-3}{2-x}=\frac{4(-2)-3}{2-(-2)}=\frac{-8-3}{2+2}=-\frac{11}{4}$$

Por tanto, se tiene que $\lim\limits_{x\to -2}\frac{4x-3}{2-x}=-\frac{11}{4}$

2. Determinar el valor de los siguientes límites teniendo en cuenta que $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=5$ y que $\lim\limits_{x\to 2}g(x)=-2$.

a. $\lim\limits_{x\to 2}[3f(x)-5[g(x)]^2]$

$$\lim_{x\to 2}[3f(x)-5[g(x)]^2]$$ Límite dado.

$$=3\lim_{x\to 2}f(x)-5\lim_{x\to 2}[g(x)]^2$$ Se aplica el límite de una diferencia y límite del producto por una constante.

$$=3\lim_{x\to 2}f(x)-5\left[\lim_{x\to 2}g(x)\right]^2$$ Se aplica el límite de una potencia.

$$=3(5)-5(-2)^2$$ Se remplaza cada límite.

$$=-5$$ Se efectúan las operaciones.

b. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{3f(x)}}{f(x)+2g(x)}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{3f(x)}}{f(x)+2g(x)}$$ Límite dado.

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{3f(x)}}{\lim\limits_{x\to 2}(f(x)+2g(x))}$$ Se aplica el límite de un cociente.

$$=\frac{\sqrt{3\lim\limits_{x\to 2}f(x)}}{\lim\limits_{x\to 2}(f(x)+2g(x))}$$ Se aplica el límite de una raíz y límite del producto por una constante en el numerador.

$$=\frac{\sqrt{3\lim\limits_{x\to 2}f(x)}}{\lim\limits_{x\to 2}f(x)+2\lim\limits_{x\to 2}g(x)}$$ Se aplica el límite de una suma y límite del producto por una constante en el denominador.

$$=\frac{\sqrt{3(5)}}{5+2(-2)}$$ Se remplaza cada límite.

$$=\sqrt{15}$$ Se realizan las operaciones.

3. Demostrar que $\lim\limits_{x\to a}\frac{mx+b}{nx+c}=\frac{ma+b}{na+c}$, si $a\neq-\frac{c}{n}$.

$$\lim_{x\to a}\frac{mx+b}{nx+c}$$ Límite dado.

$$=\frac{\lim\limits_{x\to a}mx+b}{\lim\limits_{x\to a}nx+c}$$ Se aplica el límite de un cociente teniendo en cuenta que $a\neq-\frac{c}{n}$.

$$=\frac{ma+b}{na+c}$$ Se aplica el principio de sustitución.

Ejercicios PARTE 1

En los problemas del 1 al 6 determine el límite que se indica.

1. $\lim\limits_{x\to 3}(x-5)$ **2.** $\lim\limits_{t\to -1}(1-2t)$

3. $\lim\limits_{x\to -2}(x^2+2x-1)$ **4.** $\lim\limits_{x\to -2}(x^2+2t-1)$

5. $\lim\limits_{t\to -1}(t^2-1)$ **6.** $\lim\limits_{t\to -1}(t^2-x^2)$

En los problemas del 7 al 18 determine el límite que se indica. En la mayoría de los casos, es buena idea usar primero un poco de álgebra (véase el ejemplo 2).

7. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$ **8.** $\lim\limits_{t\to -7}\frac{t^2+4t-21}{t+7}$

9. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3-4x^2+x+6}{x+1}$ **10.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4+2x^3-x^2}{x^2}$

11. $\lim\limits_{x\to -t}\frac{x^2-t^2}{x+t}$ **12.** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$

13. $\lim\limits_{t\to 2}\frac{\sqrt{(t+4)(t-2)^4}}{(3t-6)^2}$ **14.** $\lim\limits_{t\to 7^+}\frac{\sqrt{(t-7)^3}}{t-7}$

15. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^4-18x^2+81}{(x-3)^2}$ **16.** $\lim\limits_{u\to 1}\frac{(3u+4)(2u-2)^3}{(u-1)^2}$

17. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-4}{h}$ **18.** $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$

GC *En los problemas del 19 al 28 utilice una calculadora para encontrar el límite indicado. Utilice una calculadora gráfica para trazar la función cerca del punto límite.*

19. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{2x}$ **20.** $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{2t}$

21. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x-\operatorname{sen} x)^2}{x^2}$ **22.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{x^2}$

23. $\lim\limits_{t\to 1}\frac{t^2-1}{\operatorname{sen}(t-1)}$ **24.** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-\operatorname{sen}(x-3)-3}{x-3}$

25. $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{1+\operatorname{sen}(x-3\pi/2)}{x-\pi}$ **26.** $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1-\cot t}{1/t}$

27. $\lim\limits_{x\to \pi/4}\frac{(x-\pi/4)^2}{(\tan x-1)^2}$ **28.** $\lim\limits_{u\to \pi/2}\frac{2-2\operatorname{sen} u}{3u}$

Ejercicios Parte 2

7. $\lim_{x\to 3}\sqrt{3x-5}$

8. $\lim_{x\to -3}\sqrt{5x^2+2x}$

9. $\lim_{t\to -2}(2t^3+15)^{13}$

10. $\lim_{w\to -2}\sqrt{-3w^3+7w^2}$

11. $\lim_{y\to 2}\left(\dfrac{4y^3+8y}{y+4}\right)^{1/3}$

12. $\lim_{w\to 5}(2w^4-9w^3+19)^{-1/2}$

En los problemas del 13 al 24 encuentre el límite indicado o establezca que no existe. En muchos casos, necesitará usar un poco de álgebra antes de intentar evaluar el límite.

13. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2+4}$

14. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$

15. $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^2-2x-3}{x+1}$

16. $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^2+x}{x^2+1}$

17. $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^3+4x^2-19x+14}$

18. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2+7x+10}{x+2}$

19. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$

20. $\lim_{x\to -3}\dfrac{x^2-14x-51}{x^2-4x-21}$

21. $\lim_{u\to -2}\dfrac{u^2-ux+2u-2x}{u^2-u-6}$

22. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+ux-x-u}{x^2+2x-3}$

23. $\lim_{x\to \pi}\dfrac{2x^2-6x\pi+4\pi^2}{x^2-\pi^2}$

24. $\lim_{w\to -2}\dfrac{(w+2)(w^2-w-6)}{w^2+4w+4}$

En los problemas del 25 al 30 encuentre los límites $\lim_{x\to a} f(x) = 3$ *y* $\lim_{x\to a} g(x) = -1$ *(véase el ejemplo 4).*

25. $\lim_{x\to a}\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}$

26. $\lim_{x\to a}\dfrac{2f(x)-3g(x)}{f(x)+g(x)}$

27. $\lim_{x\to a}\sqrt[3]{g(x)}\left[f(x)+3\right]$

28. $\lim_{x\to a}\left[f(x)-3\right]^4$

29. $\lim_{t\to a}\left[|f(t)|+|3g(t)|\right]$

30. $\lim_{u\to a}\left[f(u)+3g(u)\right]^3$

En los problemas del 31 al 34 encuentre $\lim_{x\to 2}[f(x)-f(2)]/(x-2)$ *para cada función f dada.*

31. $f(x)=3x^2$

32. $f(x)=3x^2+2x+1$

33. $f(x)=\dfrac{1}{x}$

34. $f(x)=\dfrac{3}{x^2}$

35. Demuestre la afirmación 6 del teorema A. *Sugerencia:*

$$\begin{aligned}|f(x)g(x)-LM| &= |f(x)g(x)-Lg(x)+Lg(x)-LM|\\ &= |g(x)[f(x)-L]+L[g(x)-M]|\\ &\le |g(x)||f(x)-L|+|L||g(x)-M|\end{aligned}$$

Ahora demuestre que si $\lim_{x\to c} g(x) = M$, entonces existe un número δ_1 tal que

$$0<|x-c|<\delta_1 \Rightarrow |g(x)|<|M|+1$$

36. Demuestre la afirmación 7 del teorema A; primero dé una demostración ε–δ de que $\lim_{x\to c}[1/g(x)] = 1/\left[\lim_{x\to c} g(x)\right]$ y luego aplique la afirmación 6.

37. Demuestre que $\lim_{x\to c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to c}[f(x)-L] = 0$.

38. Demuestre que $\lim_{x\to c} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to c}|f(x)| = 0$.

39. Demuestre que $\lim_{x\to c}|x| = |c|$.

40. Encuentre ejemplos para demostrar que si

(a) $\lim_{x\to c}\left[f(x)+g(x)\right]$ existe, esto no implica que exista $\lim_{x\to c} f(x)$ o $\lim_{x\to c} g(x)$;

(b) $\lim_{x\to c}\left[f(x)\cdot g(x)\right]$ existe, esto no implica que exista $\lim_{x\to c} f(x)$ o $\lim_{x\to c} g(x)$.

En los problemas del 41 al 48 encuentre cada uno de los límites unilaterales o establezca que no existen.

41. $\lim_{x\to -3^+}\dfrac{\sqrt{3+x}}{x}$

42. $\lim_{x\to -\pi^+}\dfrac{\sqrt{\pi^3+x^3}}{x}$

43. $\lim_{x\to 3^+}\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}$

44. $\lim_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{1+x}}{4+4x}$

45. $\lim_{x\to 2^+}\dfrac{(x^2+1)[x]}{(3x-1)^2}$

46. $\lim_{x\to 3^-}(x-[x])$

47. $\lim_{x\to 0^-}\dfrac{x}{|x|}$

48. $\lim_{x\to 3^+}[x^2+2x]$

49. Suponga que $f(x)g(x)=1$ para toda x y que $\lim_{x\to a} g(x) = 0$. Demuestre que $\lim_{x\to a} f(x)$ no existe.

50. Sea R el rectángulo que une los puntos medios de los lados del cuadrilátero Q, el cual tiene vértices $(\pm x, 0)$ y $(0, \pm 1)$. Calcule

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\text{perímetro de } R}{\text{perímetro de } Q}$$

51. Sea $y=\sqrt{x}$ y considere los puntos M, N, O y P con coordenadas $(1,0)$, $(0,1)$, $(0,0)$ y (x,y) en la gráfica de $y=\sqrt{x}$, respectivamente. Calcule:

(a) $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\text{perímetro de } \Delta NOP}{\text{perímetro de } \Delta MOP}$ (b) $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\text{área de } \Delta NOP}{\text{área de } \Delta MOP}$

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** 48 **2.** 4 **3.** -8; $-4+5c$ **4.** 0

FASE DE SALIDA. Evaluación, refuerzo o planes de mejoramiento.

a. **HETEROEVALUACIÓN**: Cada una de las actividades realizadas tendrá su respectiva calificación. Se tendrá en cuenta, la participación y la calidad de los trabajos.

b. **AUTOEVALUACIÓN:** Marca con una X la valoración que crees merecer.

CRITERIO	1	2	3	4	5
Dedico el tiempo suficiente para la preparación de las actividades y evaluaciones					
Contribuyo con mi buen comportamiento en el desarrollo de las clases.					
Busco asesoría de compañeros o docente cuando me surgen duras en el proceso de aprendizaje.					
Asumo con responsabilidad el desarrollo de las actividades de clase cuando trabajo en forma individual o en grupo.					
Llevo mis apuntes en el cuaderno de forma clara y ordenada.					
Asisto puntualmente a clase de acuerdo con los horarios establecidos.					
Presento oportunamente mis trabajos y tareas acuerdo con las fechas establecidas.					
Participo activamente en clase contribuyendo al buen desarrollo de la misma.					
Presento los materiales necesarios para el desarrollo de la clase haciendo buen uso de los mismos.					
Aprovecho los espacios de refuerzo y recuperación, para mejorar mis desempeños.					

c. **COEVALUACIÓN:** Cada estudiante socializa en plenaria las valoraciones de la auto-evaluación. Los compañeros participan con mucho respeto para manifestar si esas valoraciones corresponden o no a la realidad y hacer los ajustes del caso.

TEMA	ACTIVIDAD
Poliedros- Paralelepípedos. Páginas 1 a la 3.	Ejercicios: Del 47 al 50. Página 3
Poliedros- Prismas. Página 4	Ejercicios Del 58 al 66. Página 5
Poliedros- Pirámides. Página 6	Ejercicios 74; Del 77 al 79. Página 7
Poliedros Regulares. Página 8	Ejercicios: Del 84 al 86, Del 88 al 96. Página 9
Límites. Límites Laterales. Páginas 10 a la 13	Ejercicios: Del 29 al 39; Del 46 al 51. Página 14
Límites teoremas. Página 15	Ejercicios: Parte 1: Del 1 al 6, Parte 2: Del 7 al 12
Límites Indeterminados. Páginas 16 y 18.	Ejercicios: Parte 1: Del 7 al 14, Parte 2: Del 19 al 22.