INSTITUCIÓN EDUCATIVA DEPARTAMENTAL MONSEÑOR AGUSTÍN GUTIÉRREZ

GUÍA DE TRABAJO

<table>
<tr><td>ASIGNATURA</td><td>Matemáticas</td><td>CURSO</td><td>Undécimo</td></tr>
<tr><td>DOCENTE</td><td>Diego Felipe Rodríguez</td><td>PERIODO</td><td>Cuarto</td></tr>
<tr><td>FECHA DE INICIO</td><td>18 septiembre 2023</td><td>FECHA DE TERMINACIÓN</td><td>18 noviembre 2023</td></tr>
<tr><td rowspan="2">COMPETENCIA</td><td colspan="3">Competencia General: Comprender el concepto inicial de límite.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Competencia Específica: Resolver límites aplicando las propiedades y comprender su uso en situaciones reales.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">DESEMPEÑOS</td><td>PARA APRENDER</td><td colspan="2">Entender el concepto de límite y límites laterales para hallar la solución a un problema propuesto.</td></tr>
<tr><td>PARA HACER</td><td colspan="2">Resolver límites aplicando diferentes estrategias.</td></tr>
<tr><td>PARA SER</td><td colspan="2">Lograr que el estudiante sea responsable y autónomo en la entrega de trabajos.</td></tr>
<tr><td>PARA CONVIVIR</td><td colspan="2">Reconoce la importancia de la aplicación de conceptos matemáticos al mejoramiento de su entorno.</td></tr>
<tr><td>ESTÁNDAR</td><td colspan="3">Establezco relaciones y diferencias entre notaciones de números reales para decidir sobre su uso en una situación dada.</td></tr>
<tr><td>DBA</td><td colspan="3">Usa propiedades y modelos funcionales para analizar situaciones y para establecer relaciones funcionales entre variables que permiten estudiar la variación en situaciones intraescolares y extraescolares</td></tr>
</table>

LÍMITES

Una Noción Intuitiva. Considere la función definida por

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

Observe que no está definida en $x = 1$, ya que en este punto $f(x)$ tiene la forma que carece de significado. Sin embargo, aún podemos preguntarnos qué le está sucediendo a $f(x)$ cuando x se aproxima a 1. Con mayor precisión, ¿cuándo x se aproxima a 1, $f(x)$ se está aproximando a algún número específico? Para obtener la respuesta podemos hacer tres cosas: calcular algunos valores de $f(x)$ para x cercana a 1; mostrar estos valores en un diagrama esquemático, y bosquejar la gráfica de $y = f(x)$.

x	$y = \frac{x^3-1}{x-1}$
1.25	3.813
1.1	3.310
1.01	3.030
1.001	3.003
↓	↓
1.000	?
↑	↑
0.999	2.997
0.99	2.970
0.9	2.710
0.75	2.313

Tabla
de valores

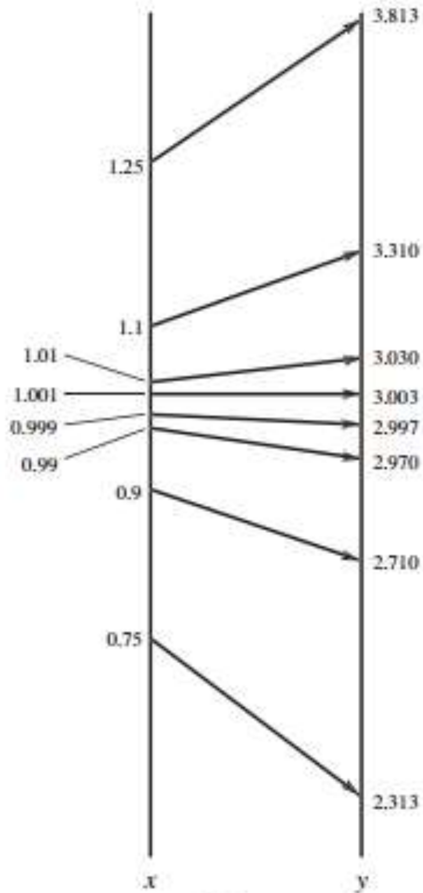
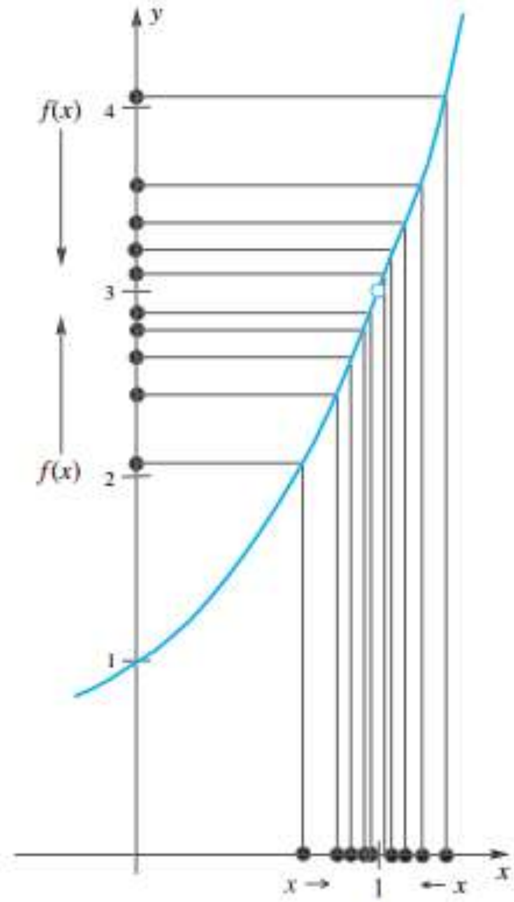


Diagrama
esquemático



Gráfica de $y = f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$

Toda la información que hemos reunido parece apuntar a la misma conclusión: $f(x)$ se aproxima a 3 cuando x se aproxima a 1. En símbolos matemáticos, escribimos:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$$

Esto se lee “el límite de $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$ cuando x tiende a 1 es igual a 3”.

Definición Significado intuitivo de límite

Decir que $\lim_{x\to c} f(x) = L$ significa que cuando x está cerca pero diferente de c, entonces $f(x)$ está cerca de L.

Ejemplos:

1. Determine $\lim_{x\to 3} 4x - 5$

   Cuando x está cerca de 3, 4x-5 está cerca de $4 * 3 - 5 = 7$ Escribimos:

$$\lim_{x\to 3} 4x - 5 = 7$$

2. Encuentre $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-x-6}{x-3}$

   Observe que $(x^2 - x - 6)/(x - 3)$ no está definida en x=3, pero todo está bien. Para tener una idea de lo que está sucediendo cuando x se aproxima a 3, podríamos emplear una calculadora para evaluar la expresión dada; por ejemplo, en 3.1, 3.01, 3.001, etcétera. Pero es mucho mejor utilizar un poco de álgebra para simplificar el problema.

Límites Laterales

Las aproximaciones que se realizan para determinar el límite de una función se relacionan con el concepto de **límite central**.

Los límites laterales se representan de formas distintas, según si la aproximación se realiza por la izquierda o por la derecha.

Definición Límites por la derecha y por la izquierda

Decir que $\lim_{x\to c^+} f(x) = L$ significa que cuando x está cerca pero a la derecha de c, entonces $f(x)$ está cerca de L. De manera análoga, decir que $\lim_{x\to c^-} f(x) = L$ significa que cuando x está cerca pero a la izquierda de c, entonces $f(x)$ está cerca de L.

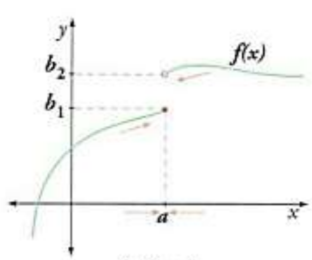
Para entender el concepto de los límites laterales, se tiene en cuenta el siguiente Teorema:

Teorema A

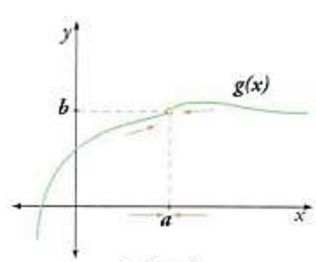
$\lim_{x\to c} f(x) = L$ si y sólo si $\lim_{x\to c^-} f(x) = L$ y $\lim_{x\to c^+} f(x) = L$.

La existencia o no existencia del límite de una función depende de los límites laterales, ya que si los límites laterales existen y son iguales, entonces el límite de la función existe y es igual al valor de los límites laterales. En cambio, si los límites laterales no existen o son diferentes, entonces, el límite de la función no existe.

Por ejemplo, en la gráfica 1 que se muestra a continuación, se tiene que $\text{Lím}_{x\to a^-} f(x) = b_1$ y $\text{Lím}_{x\to a^+} f(x) = b_2$, de donde se deduce que $\text{Lím}_{x\to a} f(x)$ no existe. Por otra parte, en la gráfica 2, se tiene que $\text{Lím}_{x\to a^-} g(x) = b$ y $\text{Lím}_{x\to a^+} g(x) = b$, de donde se deduce que $\text{Lím}_{x\to a} g(x)$ existe y es igual a b.



Gráfica 1

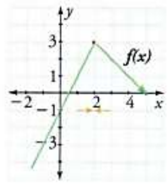


Gráfica 2

EJEMPLOS

1. Determinar el límite indicado en cada caso a partir de la gráfica.

a. $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$



Primero, se determina el límite por la izquierda.

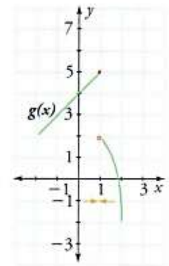
$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 3$$

Luego, se halla el límite para la derecha.

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3$$

Finalmente, se tiene que $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ existe y es igual a 3.

b. $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$



Primero, se determina el límite por la izquierda.

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = 5$$

Luego, se halla el límite por la derecha.

$$\lim_{x \to 1^+} g(x) = 2$$

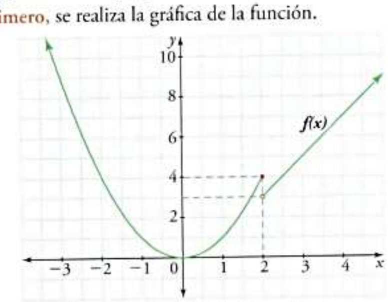
Finalmente, se tiene que $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$ no existe porque los límites laterales son diferentes.

2. Realizar la gráfica de cada función. Luego, determinar los límites que se indican.

a. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ $\qquad \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ $\qquad \lim\limits_{x \to 2} f(x)$

Primero, se realiza la gráfica de la función.



Luego, se determinan los límites laterales.

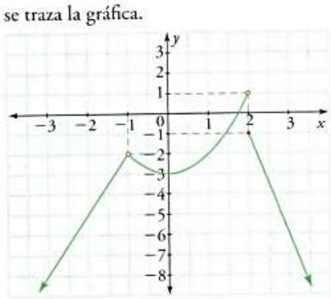
$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 4 \text{ y } \lim_{x \to 2^+} f(x) = 3$$

Finalmente, se tiene que $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ no existe porque los límites laterales son diferentes.

b. $h(x) = \begin{cases} 3x + 1 & \text{si } x < -1 \\ x^2 - 3 & \text{si } -1 < x < 2 \\ 9 - 5x & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to -1} h(x)$ $\qquad \lim\limits_{x \to 2} h(x)$

Primero, se traza la gráfica.



Luego, se calculan los límites laterales en cada punto.

$\lim\limits_{x \to -1^-} h(x) = -2 \qquad \lim\limits_{x \to 2^-} h(x) = 1$

$\lim\limits_{x \to -1^+} h(x) = -2 \qquad \lim\limits_{x \to 2^+} h(x) = -1$

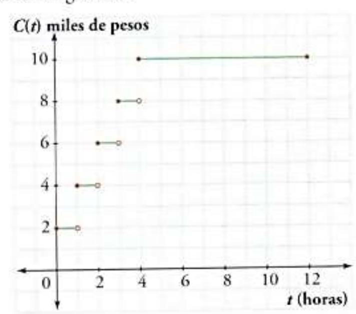
Finalmente, se tiene que $\lim\limits_{x \to -1} h(x)$ existe y es igual a -2 porque los límites laterales son iguales. En cambio, $\lim\limits_{x \to 2} h(x)$ no existe porque los límites laterales son diferentes.

3. En el siguiente cartel se muestra el sistema de cobro en un parqueadero.

> **Parqueadero**
>
> Horario 10 a. m. a 10 p. m.
>
> **Tarifas**
>
> - Cada hora o fracción: $2.000
> - Más de 5 horas: $10.000
>
> **Estancia máxima 12 horas.**

a. **Realizar la gráfica del costo C en función del tiempo t en horas.**

La función C es por partes, por tanto, su representación gráfica es la siguiente:



b. **Calcular el valor de los límites laterales de la función C para tiempos cercanos a una hora e interpretar los resultados.**

Primero, se calcula el límite por la izquierda de 1.

$$\lim_{t \to 1^-} C(t) = 2.000$$

Luego, se determina el límite por la derecha de 1.

$$\lim_{t \to 1^+} C(t) = 4.000$$

Finalmente, se tiene que, para aparcamientos cercanos e inferiores a una hora, el valor a pagar es $2.000 y, para aparcamientos cercanos y superiores a una hora, el valor a pagar es de $4.000.

c. **Determinar el valor de los límites laterales en $t = 4$ y en $t = 5$.**

Los límites laterales para $t = 4$ y $t = 5$ son:

$\lim\limits_{t \to 4^-} C(t) = 8.000 \qquad \lim\limits_{t \to 5^-} C(t) = 10.000$

$\lim\limits_{t \to 4^+} C(t) = 10.000 \qquad \lim\limits_{t \to 5^+} C(t) = 10.000$

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Ejercito · Razono · Soluciono problemas

Determina si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa, justifica tu respuesta.

25. Si el $\text{Lím}_{x \to a} f(x)$ existe, entonces, $\text{Lím}_{x \to a^-} f(x)$ también existe.

26. Si $\text{Lím}_{x \to a^-} f(x)$ y $\text{Lím}_{x \to a^+} f(x)$ existen, entonces, $\text{Lím}_{x \to a} f(x)$ existe.

27. Si $f(a)$ no está definida, entonces, los límites laterales de f en a no existen.

28. $\text{Lím}_{x \to 0^-} (3x + 1) = \text{Lím}_{x \to 0^+} (3x + 1) = 1$

Considera la función dada por la siguiente expresión

$$f(x) = \begin{cases} 5x + 6 & \text{si } x \leqslant -3 \\ 3x & \text{si } -3 < x < 1 \\ 5 & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 3 \\ x^2 - 4 & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

29. Realiza la gráfica de f.

Determina, en caso de existir, el valor de los siguientes límites.

30. $\text{Lím}_{x \to -4^-} f(x)$
31. $\text{Lím}_{x \to -4^+} f(x)$
32. $\text{Lím}_{x \to -3^-} f(x)$
33. $\text{Lím}_{x \to -3^+} f(x)$
34. $\text{Lím}_{x \to -3} f(x)$
35. $\text{Lím}_{x \to 1^-} f(x)$
36. $\text{Lím}_{x \to 1^+} f(x)$
37. $\text{Lím}_{x \to 1} f(x)$
38. $\text{Lím}_{x \to 3^+} f(x)$
39. $\text{Lím}_{x \to 3} f(x)$

Elabora, en cada caso, la gráfica de una función que cumpla las condiciones propuestas.

40. $\text{Lím}_{x \to 0} f(x) = 0$; $\text{Lím}_{x \to -2^-} f(x) = 3$;
$\text{Lím}_{x \to -2^+} f(x) = -1$; $\text{Lím}_{x \to 1^+} f(x) = 3$;
$\text{Lím}_{x \to 1^-} f(x) = 2$; $f(0) = 0$; $f(-2) = 1$; $f(1) = 2$

41. $\text{Lím}_{x \to -3} f(x) = 4$; $\text{Lím}_{x \to -1^-} f(x) < \text{Lím}_{x \to -1^+} f(x)$;
$f(-3) = 3$

42. $\text{Lím}_{x \to -2^-} f(x) = 3$; $\text{Lím}_{x \to -2^+} f(x) = 4$, $\text{Lím}_{x \to 0} f(x)$ no existe, $\text{Lím}_{x \to 2^-} f(x) > \text{Lím}_{x \to 2^+} f(x)$

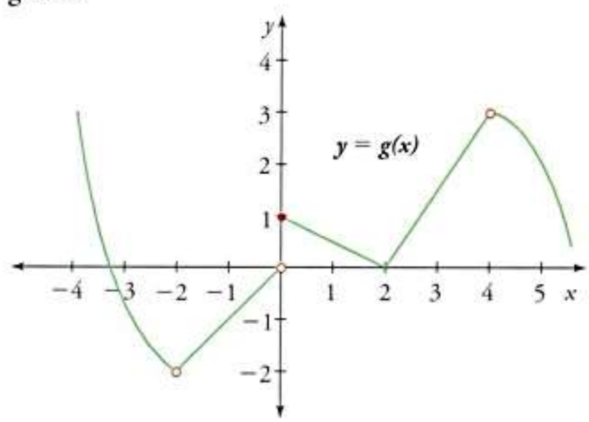
Considera la función parte entera $f(x) = [\![x]\!]$.

43. Si $n \in \mathbb{Z}$, ¿cuánto valen los límites laterales de f en n?

44. ¿Existe $\text{Lím}_{x \to n} [\![x]\!]$ con $n \in \mathbb{Z}$?

45. Si $m \notin \mathbb{Z}$, ¿qué ocurre con los límites $\text{Lím}_{x \to m^-} [\![x]\!]$ y $\text{Lím}_{x \to m^+} [\![x]\!]$?

Determina el valor de los límites de acuerdo con la gráfica.



46. $\text{Lím}_{x \to 0^-} g(x)$
47. $\text{Lím}_{x \to 0^+} g(x)$
48. $\text{Lím}_{x \to -2} g(x)$
49. $\text{Lím}_{x \to 2^-} g(x)$
50. $\text{Lím}_{x \to 2^+} g(x)$
51. $\text{Lím}_{x \to 4} g(x)$

Responde las siguientes preguntas.

52. Si $\text{Lím}_{x \to a^-} f(x) = c$ y $\text{Lím}_{x \to a^+} f(x) = -c$, ¿para qué valor de c $\text{Lím}_{x \to a} f(x)$ existe?

53. Si $\text{Lím}_{x \to 0^-} f(x) = a^2 - 5$; $\text{Lím}_{x \to 0^+} f(x) = a + 1$ y además $\text{Lím}_{x \to 0} f(x)$ existe, ¿cuánto vale $\text{Lím}_{x \to 0} f(x)$?

El servicio de acueducto en una ciudad establece una tarifa básica de \$15.000 más \$2.500 por m³ consumido. Si el consumo excede los 40 m³, cada m³ se cobraría a \$3.000.

54. Modela una función que relacione el valor que se debe pagar en relación con el consumo.

55. ¿A qué valores se acerca el costo, para consumos cercanos a los 40 m³?

Teoremas de los límites

A continuación se muestran las propiedades de los límites expresados en el siguiente teorema.

Teorema A **Teorema principal de los límites**

Sean n un entero positivo, k una constante y f y g funciones que tengan límites en c. Entonces

1. $\lim\limits_{x \to c} k = k$;
2. $\lim\limits_{x \to c} x = c$;
3. $\lim\limits_{x \to c} kf(x) = k \lim\limits_{x \to c} f(x)$;
4. $\lim\limits_{x \to c} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to c} f(x) + \lim\limits_{x \to c} g(x)$;
5. $\lim\limits_{x \to c} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x \to c} f(x) - \lim\limits_{x \to c} g(x)$;
6. $\lim\limits_{x \to c} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to c} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to c} g(x)$;
7. $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)}$, siempre que $\lim\limits_{x \to c} g(x) \neq 0$;
8. $\lim\limits_{x \to c} [f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x \to c} f(x)\right]^n$;
9. $\lim\limits_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to c} f(x)}$, siempre que $\lim\limits_{x \to c} f(x) > 0$ cuando n sea par.

Ejemplos

A continuación se muestran dos ejemplos donde se aplican las propiedades de los límites

1. Determine $\lim\limits_{x \to 3} 2x^4$

$$\lim_{x \to 3} 2x^4 \overset{3}{=} 2 \lim_{x \to 3} x^4 \overset{8}{=} 2\left[\lim_{x \to 3} x\right]^4 \overset{2}{=} 2[3]^4 = 162$$

2. Determine $\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}$

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x^2+9}}{x} \overset{7}{=} \frac{\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{x^2+9}}{\lim\limits_{x \to 4} x} \overset{9,2}{=} \frac{\sqrt{\lim\limits_{x \to 4} (x^2+9)}}{4} \overset{4}{=} \frac{1}{4}\sqrt{\lim_{x \to 4} x^2 + \lim_{x \to 4} 9}$$

$$\overset{8,1}{=} \frac{1}{4}\sqrt{\left[\lim_{x \to 4} x\right]^2 + 9} \overset{2}{=} \frac{1}{4}\sqrt{4^2+9} = \frac{5}{4}$$

Límites de funciones indeterminadas

En algunos casos, al aplicar la sustitución directa para calcular un límite, el resultado puede ser que no existe el límite, como $\frac{L}{0}$ o también una indeterminación.

Límites de funciones racionales

Cuando la indeterminación se obtiene en una función racional. La indeterminación se evita, factorizando el numerador y el denominador y luego simplificando los factores comunes.

Ejemplo

Determine el valor del siguiente límite $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$

SOLUCIÓN Sea $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$. No puede hallar el límite al sustituir $x = 1$ porque $f(1)$ no está definido. tampoco puede aplicar la ley del cociente porque el límite del denominador es 0. En lugar de ello, necesita algo de álgebra preliminar. Factorice el numerador como una diferencia de cuadrados:

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

El numerador y el denominador tienen un factor común de $x - 1$. Cuando toma el límite a medida que x tiende a 1, tiene $x \neq 1$ y, por lo tanto, $x - 1 \neq 0$. Por consiguiente, cancele el factor común y calcule el límite como sigue:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

El límite de este ejemplo surgió en la sección 2.1, cuando trató de hallar la tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto $(1, 1)$. □

Límites de funciones radicales

Si $f(x)$ o $g(x)$ son funciones radicales y $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ tiene la forma $\frac{0}{0}$, entonces es posible eliminar la indeterminación, racionalizando el numerador o el denominador o ambos y después simplificar la expresión resultante.

Ejemplo

Determine el valor del límite $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x}$

SOLUCIÓN No puede aplicar la ley del cociente de inmediato, puesto que el límite del denominador es 0. En el presente caso, el álgebra preliminar consiste en la racionalización del numerador:

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} &= \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} \cdot \frac{\sqrt{t^2 + 9} + 3}{\sqrt{t^2 + 9} + 3} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{(t^2 + 9) - 9}{t^2\left(\sqrt{t^2 + 9} + 3\right)} = \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{t^2\left(\sqrt{t^2 + 9} + 3\right)} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 9} + 3} = \frac{1}{\sqrt{\lim_{t \to 0} (t^2 + 9)} + 3} = \frac{1}{3 + 3} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Ejercicios

15. $\lim\limits_{v\to 4} \dfrac{v^2-6v+8}{2v^2-8v}$

16. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-8x+15}{x^2-7x+12}$

17. $\lim\limits_{h\to \frac{1}{2}} \dfrac{4h^2+4h-3}{2h-1}$

18. $\lim\limits_{x\to \frac{2}{3}} \dfrac{3x-2}{3x^2-11x+6}$

19. $\lim\limits_{w\to -\frac{4}{3}} \dfrac{9w^2+9w-4}{3w^2+7w+4}$

20. $\lim\limits_{y\to 6} \dfrac{2y^2-15y+18}{3y^2-17y-6}$

21. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{2x^2-13x+15}{x^2-x-20}$

22. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}} \dfrac{9x^2-1}{6x^2+5x+1}$

23. $\lim\limits_{y\to -1} \dfrac{y+1}{y^3+1}$

24. $\lim\limits_{h\to \frac{1}{2}} \dfrac{8h^3-1}{1-2h}$

25. $\lim\limits_{x\to \frac{2}{3}} \dfrac{27x^3-8}{9x^2-4}$

26. $\lim\limits_{w\to -2} \dfrac{w^2+5w+6}{w^3+8}$

27. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{4}} \dfrac{64x^3-1}{4x^3-x^2}$

28. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

29. $\lim\limits_{y\to -2} \dfrac{y+2}{\sqrt{y+3}-1}$

30. $\lim\limits_{w\to 0} \dfrac{\sqrt{w}}{\sqrt{w+3}-\sqrt{3}}$

31. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{\sqrt{4x^2+3}-2}{2x-1}$

32. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x-5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$

33. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{1-\sqrt{3x-2}}$

34. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x^2+9}-5}{\sqrt{x+5}-3}$

35. $\lim\limits_{w\to 0} \dfrac{a-\sqrt{w^2+a^2}}{b-\sqrt{w^2+b^2}}$

36. $\lim\limits_{y\to p} \dfrac{\sqrt[8]{y}-\sqrt[8]{p}}{y-p}$

37. $\lim\limits_{v\to 0} \dfrac{\sqrt{4-2v+v^2}-2}{v}$

38. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-7x+6}{x^3+x^2-4x-4}$

39. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^2+4x+3}$

40. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^4+2x^3-11x^2-12x+36}{x^3-2x^2-x+2}$

41. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-x^2-4x+4}{x^3+6x^2+5x-12}$

42. $\lim\limits_{y\to 2} \dfrac{y^3-6y^2+12y-8}{y^4-4y^3+16y-16}$

43. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{3x+5}-2}{x-1}$

44. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{x^2-a^2}$

45. $\lim\limits_{x\to \frac{2}{3}} \dfrac{\sqrt[3]{9x^2+4}-2}{3x-2}$

46. $\lim\limits_{y\to 2} \dfrac{\sqrt[4]{y^3+8}-\sqrt{2+y}}{y-2}$

47. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt[4]{x+h}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}$

48. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+7}-\sqrt[3]{4x+19}}{x-2}$

49. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{x+6}-2}{\sqrt[3]{x-1}-1}$

50. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt[5]{2x+3}-1}{x^5+1}$

LÍMITES DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Anteriormente se estudió que los límites de funciones polinomiales siempre pueden encontrarse por sustitución y los límites de funciones racionales pueden encontrarse por sustitución, siempre y cuando el denominador no sea cero en el punto límite. Esta regla de sustitución se aplica también a las funciones trigonométricas. Este resultado se establece a continuación.

Teorema A Límites de funciones trigonométricas

Para todo número real c en el dominio de la función,

1. $\lim\limits_{t\to c} \operatorname{sen} t = \operatorname{sen} c$
2. $\lim\limits_{t\to c} \cos t = \cos c$
3. $\lim\limits_{t\to c} \tan t = \tan c$
4. $\lim\limits_{t\to c} \cot t = \cot c$
5. $\lim\limits_{t\to c} \sec t = \sec c$
6. $\lim\limits_{t\to c} \csc t = \csc c$

EJEMPLO 1 Encuentre $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t^2 \cos t}{t+1}$.

SOLUCIÓN

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^2 \cos t}{t+1} = \left(\lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t+1}\right)\left(\lim_{t\to 0} \cos t\right) = 0 \cdot 1 = 0$$

Dos límites importantes que no pueden evaluarse por sustitución son:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} \quad \text{y} \quad \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t}$$

EJERCICIOS

Construya una tabla de valores para evaluar los siguientes límites (utilice la calculadora en radianes), indique el valor al cual tiende el límite:

a. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}$

b. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1-\cos t}{t}$

LÍMITES TRIGONOMÉTRICOS ESPECIALES

Teorema B Límites trigonométricos especiales

1. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$
2. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1-\cos t}{t} = 0$

Demostración de la afirmación 2El segundo límite se deduce con facilidad a partir del primero. Sólo multiplique el numerador y el denominador por $(1 + \cos t)$; esto da:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t} \cdot \frac{1+\cos t}{1+\cos t} = \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos^2 t}{t(1+\cos t)} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t(1+\cos t)} \\ &= \left(\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\right) \frac{\lim\limits_{t\to 0} \operatorname{sen} t}{\lim\limits_{t\to 0}(1+\cos t)} = 1 \cdot \frac{0}{2} = 0\end{aligned}$$

Podemos usar los límites anteriormente vistos para evaluar otros límites.

EJEMPLO 2 Encuentre cada límite,

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x}$ (b) $\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{\operatorname{sen} t}$ (c) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 4x}{\tan x}$

SOLUCIÓN

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x} = \lim_{x\to 0} 3\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x} = 3\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{3x}$

Aquí, el argumento de la función seno es $3x$, no sólo x, como lo requiere el teorema B. Sea $y = 3x$. Entonces $y \to 0$ si y sólo si $x \to 0$, de modo que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{3x} = \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = 1$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x} = 3\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{3x} = 3$$

(b)
$$\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{\operatorname{sen} t} = \lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{1-\cos t}{t}}{\dfrac{\operatorname{sen} t}{t}} = \frac{\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1-\cos t}{t}}{\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}} = \frac{0}{1} = 0$$

(c)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 4x}{\tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{4 \operatorname{sen} 4x}{4x}}{\dfrac{\operatorname{sen} x}{x \cos x}}$$

$$= \frac{4\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 4x}{4x}}{\left(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)\left(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\cos x}\right)} = \frac{4}{1 \cdot 1} = 4$$

EJERCICIOS

En los problemas del 1 al 14 evalúe cada límite.

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{x+1}$
2. $\lim_{\theta\to \pi/2} \theta \cos \theta$
3. $\lim_{t\to 0} \frac{\cos^2 t}{1+\operatorname{sen} t}$
4. $\lim_{x\to 0} \frac{3x \tan x}{\operatorname{sen} x}$
5. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2x}$
6. $\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3\theta}{2\theta}$
7. $\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3\theta}{\tan \theta}$
8. $\lim_{\theta\to 0} \frac{\tan 5\theta}{\operatorname{sen} 2\theta}$
9. $\lim_{\theta\to 0} \frac{\cot (\pi\theta) \operatorname{sen} \theta}{2 \sec \theta}$
10. $\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 3t}{2t}$
11. $\lim_{t\to 0} \frac{\tan^2 3t}{2t}$
12. $\lim_{t\to 0} \frac{\tan 2t}{\operatorname{sen} 2t - 1}$
13. $\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3t + 4t}{t \sec t}$
14. $\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{\theta^2}$

LIMITES AL INFINITO

Considere la función $g(x) = \frac{x}{(1+x^2)}$ cuya gráfica se muestra en la figura 1. Hacemos esta pregunta: ¿qué le sucede a g(x) cuando x se hace cada vez más grande? En símbolos, preguntamos por el valor de $\lim_{x\to\infty} g(x)$

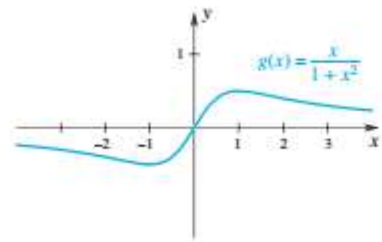


Figura 1

Cuando escribimos $x \to \infty$, no queremos dar a entender que en un lugar muy, muy alejado a la derecha del eje x exista un número —más grande que todos los demás— al cual se aproxima x. En lugar de eso utilizamos $x \to \infty$ como una forma breve de decir que x se hace cada vez más grande sin cota.

En la tabla de la figura 2 hemos listado valores de $g(x) = \frac{x}{(1+x^2)}$ para diversos valores de x. Parece que g(x) se hace cada vez más pequeño conforme xse hace cada vez más grande. Escribimos:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$$

Observemos el siguiente ejemplo:

Demuestre que $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0.$

Aquí utilizamos un truco común: dividir el numerador y el denominador entre la potencia más alta de x que aparece en el denominador, esto es, x^2.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{1+x^2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+1}$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}}{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} + \lim_{x\to\infty} 1} = \frac{0}{0+1} = 0$$

Igualmente observemos este

Encuentre $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3}{1+x^3}.$

Se divide entre la potencia más alta de x, tanto en el numerador como en el denominador:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3}{1+x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{1/x^3+1} = \frac{2}{0+1} = 2$$

En los problemas del 1 al 42 determine los límites.

1. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{x-5}$

2. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2}{5-x^3}$

3. $\lim\limits_{t \to -\infty} \frac{t^2}{7-t^2}$

4. $\lim\limits_{t \to -\infty} \frac{t}{t-5}$

5. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2}{(x-5)(3-x)}$

6. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2-8x+15}$

7. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^3}{2x^3-100x^2}$

8. $\lim\limits_{\theta \to -\infty} \frac{\pi\theta^5}{\theta^5-5\theta^4}$

9. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^3-x^2}{\pi x^3-5x^2}$

10. $\lim\limits_{\theta \to \infty} \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\theta^2-5}$

11. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3\sqrt{x^3}+3x}{\sqrt{2x^3}}$

12. $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt[3]{\frac{\pi x^3+3x}{\sqrt{2}x^3+7x}}$

13. $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt[3]{\frac{1+8x^2}{x^2+4}}$

14. $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{\frac{x^2+x+3}{(x-1)(x+1)}}$

15. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{2n+1}$

16. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^2}{n^2+1}$

17. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^2}{n+1}$

18. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{n^2+1}$

19. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+3}}$. *Sugerencia:* divida el numerador y el denominador entre x. Observe que, para $x > 0$, $\sqrt{x^2+3}/x = \sqrt{(x^2+3)/x^2}$.

20. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sqrt{2x+1}}{x+4}$

21. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{2x^2+3}-\sqrt{2x^2-5}\right)$. *Sugerencia:* multiplique y divida por $\sqrt{2x^2+3}+\sqrt{2x^2-5}$.

22. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)$

23. $\lim\limits_{y \to -\infty} \frac{9y^3+1}{y^2-2y+2}$. *Sugerencia:* divida el numerador y el denominador entre y^2.

24. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n}$, donde $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$ y n es un número natural.

25. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

26. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^3+2n+1}}$

27. $\lim\limits_{x \to 4^+} \frac{x}{x-4}$

28. $\lim\limits_{t \to -3^+} \frac{t^2-9}{t+3}$

29. $\lim\limits_{t \to 3^-} \frac{t^2}{9-t^2}$

30. $\lim\limits_{x \to \sqrt[3]{5}^+} \frac{x^2}{5-x^3}$

31. $\lim\limits_{x \to 5^-} \frac{x^2}{(x-5)(3-x)}$

32. $\lim\limits_{\theta \to \pi^+} \frac{\theta^2}{\operatorname{sen}\theta}$

33. $\lim\limits_{x \to 3^-} \frac{x^3}{x-3}$

34. $\lim\limits_{\theta \to (\pi/2)^+} \frac{\pi\theta}{\cos\theta}$

35. $\lim\limits_{x \to 3^-} \frac{x^2-x-6}{x-3}$

36. $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x^2+2x-8}{x^2-4}$

37. $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{[x]}{x}$

38. $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{[x]}{x}$

FASE DE SALIDA. Evaluación, refuerzo o planes de mejoramiento.

a. **HETEROEVALUACIÓN**: Cada una de las actividades realizadas tendrá su respectiva calificación. Se tendrá en cuenta, la participación y la calidad de los trabajos.

b. **AUTOEVALUACIÓN:** Marca con una X la valoración que crees merecer.

CRITERIO	1	2	3	4	5
Dedico el tiempo suficiente para la preparación de las actividades y evaluaciones					
Contribuyo con mi buen comportamiento en el desarrollo de las clases.					
Busco asesoría de compañeros o docente cuando me surgen duras en el proceso de aprendizaje.					
Asumo con responsabilidad el desarrollo de las actividades de clase cuando trabajo en forma individual o en grupo.					
Llevo mis apuntes en el cuaderno de forma clara y ordenada.					
Asisto puntualmente a clase de acuerdo con los horarios establecidos.					

Presento oportunamente mis trabajos y tareas acuerdo con las fechas establecidas.					
Participo activamente en clase contribuyendo al buen desarrollo de la misma.					
Presento los materiales necesarios para el desarrollo de la clase haciendo buen uso de los mismos.					
Aprovecho los espacios de refuerzo y recuperación, para mejorar mis desempeños.					

c. **COEVALUACIÓN:** Cada estudiante socializa en plenaria las valoraciones de la auto-evaluación. Los compañeros participan con mucho respeto para manifestar si esas valoraciones corresponden o no a la realidad y hacer los ajustes del caso.